Passage à la limite sous l'intégrale

1 Théorème de convergence dominée

1.1 Convergence simple

Définition

Soit X un ensemble, f une fonction de X dans $\mathbb{C}$, et (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$.

On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X si, pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

1.2 Enoncé

I désigne un intervalle quelconque.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{C}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction g intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall n \geq 0, |f_n| \leq g$$

Alors

$$\lim_n \int_I f_n = \int_I f$$

Extension au cas d'une famille $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle

On a un résultat analogue si on suppose que $f_\lambda(x)$ tend vers $f(x)$ quand λ tend vers un élément λ_0 de $\overline{J}$, pour tout élément x de I.

1.3 Premiers exemples

1.3.1 Chapeaux

$I = [0,1]$; chapeaux pointus sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ de hauteur n.

1.3.2 Plateaux

$I = \mathbb{R}$; plateau large sur $[-n, n]$ de hauteur $\frac{1}{n}$.

1.3.3 Bosse glissante

$I = \mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x-n)^2}$$

Extension : on peut remplacer n entier par λ réel, $\lambda \to +\infty$.

1.3.4 Intégrales de Wallis

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n$$

Montrer que (I_n) converge vers 0.

Démonstration sans le TCVD ?

Réponse

Fixons ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$; on écrit

$$\forall n \geq 0, I_n = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}$$

D'où

$$\forall n \geq 0, 0 \leq I_n \leq \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \leq \varepsilon + \frac{\pi}{2}.\left(\cos\varepsilon\right)^n$$

D'où

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, 0 \leq I_n \leq 2\varepsilon$$

1.4 L'intégrale de Gauss

Soit

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$$

Montrer que

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sqrt{n}.w_{2n+1}$$

En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Réponse

Par changement de variable $x = \sqrt{n}.\sin u$, on obtient

$$\forall n \geq 1, u_n = \sqrt{n}.w_{2n+1}$$

Le théorème de convergence dominée s'applique avec $f\left(x\right) = g\left(x\right) = e^{-x^2}$.

1.5 Une formule pour Γ

Soit $x > 0$; pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$$

Montrer que

$$\forall n \geq 1,\ I_n = \frac{n!n^x}{x\left(x+1\right)...\left(x+n\right)}$$

En déduire que

$$\Gamma\left(x\right) = \lim_n \frac{n!n^x}{x\left(x+1\right)...\left(x+n\right)}$$

Méthode

$n+1$ intégrations par parties.

1.6 $I_n = \int_0^1 f\left(t\right) t^n \mathrm{d}t$

On suppose f continue sur $J = [0,1]$; montrer que I_n existe pour $n \geq 0$; montrer que (I_n) tend vers 0 ; avec $t = u^{\frac{1}{n}}$, montrer que $\lim\limits_n n.I_n = f\left(1\right)$; peut-on en déduire un équivalent de (I_n) ?

Réponse

Soit $M = \sup\limits_J |f|$.

$$\forall n \geq 0, |I_n| \leq \int_0^1 |f(t)|\, t^n \mathrm{d}t \leq M. \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{M}{n+1}$$

Donc (I_n) tend vers 0 ; ici, le théorème de convergence dominée est un luxe inutile.

Ensuite :

$$\forall n \geq 1, \int_0^1 f(t)\, t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n} \int_0^1 f\left(u^{\frac{1}{n}}\right) u^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}u$$

Soit

$$J_n = \int_0^1 f\left(u^{\frac{1}{n}}\right) u^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}u$$

Le théorème de convergence dominée s'applique à (J_n) : (J_n) converge vers $f(1)$.

Si $f(1) \neq 0$,

$$I_n \sim \frac{f(1)}{n}$$

Si $f(1) = 0$,

$$I_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1.7 Une suite peu docile

Soit $f_n(x) = \sin nx$; montrer que si $0 < p < q$, alors $\int_0^{2\pi} (f_p - f_q)^2 = 2\pi$; en déduire que (f_n) n'a pas de suite extraite convergente sur $\mathbb{R}$.

Réponse

Supposons l'existence d'une suite extraite $(h_n) = \left(f_{\varphi(n)}\right)$ convergente.

Le théorème de convergence dominée montre que

$$\int_0^{2\pi} (h_{n+1} - h_n)^2$$

tend vers 0, contradiction.

2 Théorème d'intégration terme à terme

2.1 Enoncé

I désigne un intervalle quelconque.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{C}$, intégrables, telle que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I, vers une fonction s continue par morceaux sur I et telle que la série numérique

$$\sum \int_I |u_n|$$

converge. Alors :

s est intégrable sur I et

$$\int_I s = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

2.2 Exemples

2.2.1 Exemple 1

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} \mathrm{d}t = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Démonstration

On choisit $I =]0,1[$; on sait que

$$\forall t \in I, \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

On choisit donc $u_n(t) = -t^n.\ln t$; pour $n \geq 0$:

$$a_n = \int_I |u_n| = -\int_0^1 t^n.\ln t\mathrm{d}t$$

se calcule par intégration par parties : $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$; (a_n) est bien le terme général d'une série numérique convergente.

Donc le théorème s'applique et conduit au résultat.

2.2.2 Exemple 2

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\zeta(2) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

2.2.3 Exemple 3

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Démonstration

Soit $I =]0,1[$.

$$\forall x \in I, f(x) = x^{-x} = \exp(-x.\ln x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x.\ln x)^n$$

$$\forall n \geq 0,\ a_n = \int_I |u_n| = \frac{1}{n!}\int_0^1 (-x.\ln x)^n \mathrm{d}x$$

Avec le changement de variable $x = e^{-u}$, on est ramené à la fonction Γ :

$$\forall n \geq 0, \int_0^1 (-x.\ln x)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} u^n.e^{-(n+1)u}\mathrm{d}u = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\int_0^{\infty} v^n.e^{-v}\mathrm{d}v$$

2.3 Pour s'entraîner à calculer

Montrer que pour tout réel x :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos tx\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

en écrivant cos comme somme d'une série.

Une autre méthode plus rapide

En calculant la dérivée de f, voir chapitre suivant.

2.4 Quand ça se complique

Montrer que

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Plus généralement

$$\forall x > 0, \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

On essaie d'appliquer le théorème

Ici $I =]0,1[$.

$$\forall t \in]0,1[\,, \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k .t^k$$

$u_n(t) = (-1)^n .t^n$.

$$a_n = \int_I |u_n| = \frac{1}{n+1}$$

donc le théorème ne s'applique pas...

On essaie une autre méthode

$$\forall n \geq 0, \forall t \in I, \sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$$

On intègre

$$\forall n \geq 0, \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n .J_n$$

où

$$J_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

Pour conclure

$$\forall n \geq 0,\ 0 \leq J_n \leq \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}$$

2.5 Encore un...

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$; on veut montrer l'existence et calculer

$$s(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\theta}{k}$$

On part de $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t$; on rencontre

$$I_n = \int_0^1 \frac{\left(t.e^{i\theta}\right)^n}{1-t.e^{i\theta}}\mathrm{d}t$$

on montre que (I_n) tend vers 0 et on obtient :

$$s(\theta) = \mathrm{Re} \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}\mathrm{d}t = -\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

2.6 Complément

Le théorème de convergence monotone

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}^+$.

On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et a une somme f continue par morceaux intégrable ; alors le théorème précédent s'applique.

Démonstration

Notons $a_n = \int_I |u_n| = \int_I u_n$; alors :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \int_I \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \leq \int_I f$$

La suite (s_n) est donc croissante et majorée, donc converge ; donc $\sum a_n$ converge.

3 Complément : recherche d'équivalents

Hors-programme et difficile ; réservé à un public averti...

3.1 Un premier cas simple

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$

3.1.1 Existence de I_n ?

3.1.2 Limite de (I_n).

Plusieurs méthodes possibles :
1- Utiliser le TCVD.
2- Découper en deux, analogue au cas des intégrales de Wallis.
3- Majorer simplement :

$$\forall n \geq 2,\, 0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq \frac{1}{n-1}$$

3.1.3 Un équivalent de I_n.

On effectue le changement de variable $t = \frac{u}{n}$:

$$\forall n \geq 1,\, I_n = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{\mathrm{d}u}{\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n} = \frac{1}{n}.J_n$$

Or, pour $u \geq 0$,

$$\lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n} = e^{-u}$$

Il reste à trouver une domination...

Domination

On montre d'abord l'existence de $c > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0,1]\,,\, \ln(1+x) \geq cx$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 1, \forall u \in [0,n]\,,\, 0 \leq \frac{1}{\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} \leq e^{-cu}$$

Domination par une fonction de u intégrable indépendante de n.

Conclusion

$$I_n \sim \frac{1}{n}$$

3.2 Une variante

$$I_n = \int_0^1 \left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$$

3.2.1 Limite de (I_n).

Plusieurs méthodes possibles :
1- Utiliser le TCVD.
2- Découper en deux, analogue au cas des intégrales de Wallis.
3- Majorer en utilisant la convexité :

$$\forall t \in [0,1]\,,\, 0 \leq 1-t+\frac{t^2}{2} \leq 1-\frac{t}{2}$$

3.2.2 Un équivalent de I_n.

On effectue le changement de variable $t = \frac{u}{n}$:

$$\forall n \geq 1,\ I_n = \frac{1}{n}\int_0^n \left(1 - \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2n^2}\right)^n \mathrm{d}u = \frac{1}{n}.J_n$$

Or, pour $u \geq 0$,

$$\lim_n \left(1 - \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2n^2}\right)^n = e^{-u}$$

Il reste à trouver une domination...

Domination

$$\forall t \in [0,1]\,, 0 \leq 1 - t + \frac{t^2}{2} \leq 1 - \frac{t}{2}$$

D'où

$$\forall u \geq 0, \forall n \geq 1,\ \left(1 - \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2n^2}\right)^n \leq \left(1 - \frac{u}{2n}\right)^n \leq \exp\left(-\frac{u}{2}\right)$$

Domination par une fonction de u intégrable indépendante de n.

Conclusion

$$I_n \sim \frac{1}{n}$$

3.3 Généralités

Soit $a > 0$, $I = [0, a]$, et f fonction continue sur I vérifiant :

- $\forall t \in \left]0, 1\right]\,,\ 0 \leq f(t) < 1$
- $\forall t \in \left]0, 1\right]\,, f(t) = 1 - \alpha t^\beta + t^\beta \varepsilon(t)$ avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $\lim_0 \varepsilon = 0$.

Soit

$$g(x) = \int_0^a f^x(t)\,\mathrm{d}t$$

Trouver un équivalent de g en $+\infty$.

Méthode

Le TCVD montre que $\lim_{+\infty} g = 0$, mais ne permet pas d'obtenir directement un équivalent.

Il faut faire d'abord un changement de variable. Lequel ?

On peut s'inspirer du cas particulier suivant :

$$f(t) = \exp\left(-\alpha t^\beta\right)$$

Dans ce cas,

$$g(x) = \int_0^a \exp\left(-\alpha x t^\beta\right)\mathrm{d}t$$

Il est assez naturel de penser à

$$t = \left(\frac{u}{\alpha x}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

On obtient

$$\forall x > 0,\ g(x) = \frac{1}{\beta}.(\alpha x)^{-\frac{1}{\beta}}.\int_0^{a(x)} e^{-u}.u^{\frac{1}{\beta}-1}\mathrm{d}u$$

avec $a(x) = \alpha x a^\beta$; on en déduit :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\beta}.\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right).(\alpha x)^{-\frac{1}{\beta}}$$

Retour au cas général

On effectue le changement de variable précédent, et on essaie d'appliquer le TCVD.

Le problème est de trouver une domination, ce qu'on va voir sur quelques exemples.

3.4 Intégrales de Wallis

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x t \, \mathrm{d}t$$

Ici $a = \frac{\pi}{2}$, $f = \cos$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 2$.

On essaie donc

$$t = \left(\frac{2u}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall x > 0,\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} . \int_0^{a(x)} \frac{1}{\sqrt{u}} \cos^x \sqrt{\frac{2u}{x}} \mathrm{d}u$$

Convergence simple

Avec un petit calcul,

$$\forall u > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \cos^x \sqrt{\frac{2u}{x}} = e^{-u}$$

Domination

On montre que

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \cos t \leq 1 - \frac{t^2}{4}$$

On en tire une domination par

$$\frac{1}{\sqrt{u}} . e^{-\frac{u}{2}}$$

Conclusion

On retrouve l'équivalent classique

$$g(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

3.5 Equivalent de $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{ch}t)^n}$

Tout d'abord, on remplace I_n par $I_n = \int_0^{+\infty} = \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{ch}t)^n}$.

A nouveau, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 2$. On essaie donc

$$t = \left(\frac{2u}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall n \geq 1,\ I_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} . \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^x \sqrt{\frac{2u}{n}}} . \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$$

Convergence simple

A nouveau, convergence simple vers

$$\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$$

Domination

On va s'inspirer des exemples précédents.

$$\frac{1}{\mathrm{ch}t} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o\left(t^2\right)$$

Donc il existe $a > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, a]\,,\; 0 \leq \frac{1}{\mathrm{ch}t} \leq 1 - \frac{t^2}{4}$$

On découle l'intégrale en deux :

$$\forall n \geq 1,\; I_n = J_n + K_n$$

avec

$$J_n = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{ch}t)^n}$$

Pour J_n, c'est quasiment identique au cas précédent (Wallis).

Il reste à montrer que

$$K_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ce qui est nettement plus facile.

Conclusion

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

3.6 La formule de Stirling

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^x \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} x^x.e^{-x}.\sqrt{2\pi x}$$

Le lien avec ce qui précède

On étudie la fonction

$$t \to e^{-t}.t^x$$

et on constate un maximum en $t = x$.

D'où le changement de variable $t = x + s$:

$$\forall x > 0,\; \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^x \mathrm{d}t = e^{-x}.x^x.\int_{-x}^{\infty} e^{-s}\left(1 + \frac{s}{x}\right)^x \mathrm{d}s$$

Puis $s = xv$:

$$\forall x > 0,\; \Gamma(x+1) = e^{-x}.x^x.\int_{-x}^{\infty} e^{-s}\left(1 + \frac{s}{x}\right)^x \mathrm{d}s = e^{-x}.x^{x+1}.\int_{-1}^{\infty}\left[e^{-v}(1+v)\right]^x \mathrm{d}v$$

On est ramené à chercher un équivalent de

$$g(x) = \int_{-1}^{\infty}\left[e^{-v}(1+v)\right]^x \mathrm{d}v$$

ce qui entre dans le cadre de cette étude.

Un équivalent de g

Ici

$$f(v) = e^{-v}(1+v) = 1 - \frac{v^2}{2} + o\left(v^2\right)$$

Pas très original ! La même méthode va conduire au même résultat :

$$g(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$$

Puis

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^x \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} x^x.e^{-x}.\sqrt{2\pi x}$$