Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

Contents

1 Généralités

1.1 Définition

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = c(x)$$

où a, b, et c sont continues sur un intervalle I à valeurs dans K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pourquoi linéaire ?

$$u(y) = c$$

avec u application linéaire :

$$u : y \to a.y' + b.y$$

Que dire de l'ensemble S des solutions ?

Si $c \notin \mathrm{Im}u$, S est vide.

Sinon, S est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(u)$:

$$S = \{y_0 + z / \, z \in \mathrm{Ker}u\}$$

1.2 Réduction

On étudie sur des intervalles où a ne s'annule pas, ensuite on réfléchit...

1.3 Equation réduite

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x)$$

1.3.1 Théorème de Cauchy linéaire

Soit $x_0 \in I$ et $\alpha \in K$; il existe une solution unique y définie sur I telle que

$$\left\{ \begin{array}{c} y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x) \\ y(x_0) = \alpha \end{array} \right.$$

Attention, ne s'applique à

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = c(x)$$

que si a ne s'annule pas sur I.

1.3.2 Démonstration

On utilise la méthode de variation de la constante :
on cherche y sous la forme

$$y(x) = \lambda(x).\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

avec λ de classe C^1 sur I.
On obtient

$$\lambda'(x) = b(x).\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

et

$$\lambda(x_0) = \alpha$$

Remarque

Chercher y sous cette forme n'est pas restrictif, pourquoi ?

1.3.3 L'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions des solutions est donc un espace vectoriel de dimension 1 dans le cas homogène ($b = 0$), un espace affine de dimension 1 dans le cas général.

1.3.4 Interprétation graphique

2 Exemples et exercices

2.1 $x^2 y' + x(2 - x)\,y = e^x - 1 + x$

2.1.1 Sur $I =]0, +\infty[$

$$y(x) = \frac{e^x - 1}{x} + C.\frac{e^x}{x^2}$$

2.1.2 Sur $\mathbb{R}$?

$$y(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

se prolonge en une solution de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; pourquoi ?

Réponse

C'est la somme d'une série entière de rayon infini.

2.2 $t^2 y'(t) + y(t) = t^2$

Sur $I =]0, +\infty[$, montrer que

$$t^2 y'(t) + y(t) = t^2$$

possède une unique solution ayant une limite finie en 0^+ ; est-elle DSE ?

Réponse

$$y(t) = e^{\frac{1}{t}} . \int_0^t e^{-\frac{1}{u}} \mathrm{d}u$$

qui est dominée par t au voisinage de 0.

Ensuite on cherche une série entière de rayon non nul dont la somme est solution ; après calculs

$$a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1$$

et, pour tout $n \neq 2$:

$$a_n = -(n-1) a_{n-1}$$

puis

$$a_n = (-1)^n (n-1)!$$

Donc un rayon de convergence nul.

2.3 $y' - y = \ln x$

Sur $I =]0, +\infty[$:

$$y' - y = \ln x$$

Etudier les solutions au voisinage de 0^+ ; puis au voisinage de $+\infty$; étudier la solution exceptionnelle

$$y(x) = -\ln x - e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$$

2.4 $y' + y = f$

Sur $I = \mathbb{R}$:

1- Montrer que si f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, il existe une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

2- Montrer que si f est de plus périodique, cette solution l'est aussi.

Réponse

$$y(x) = e^{-x} . \int_{-\infty}^x e^u f(u) \mathrm{d}u$$

2.5 Une inéquation intégrale

Soit $I = [1, +\infty[$ et $a > 0, b > 0$; soit f continue de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \geq 1,\ f(x) \leq a + b \int_1^x \frac{f(u)}{u^2} \mathrm{d}u$$

Montrer que f est majorée.

Indication

Utiliser

$$F(x) = a + b \int_1^x \frac{f(u)}{u^2} \mathrm{d}u$$

Réponse

On a successivement :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = b.\frac{f(x)}{x^2} \leq b.\frac{F(x)}{x^2}$$

$$\forall x \in I,\ F'(x) - b.\frac{F(x)}{x^2} \leq 0$$

$$\forall x \in I,\ \left(F'(x) - b.\frac{F(x)}{x^2}\right)\exp\left(\frac{b}{x}\right) \leq 0$$

$$\forall x \in I,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x).\exp\left(\frac{b}{x}\right) \leq 0$$

$$\forall x \in I,\ F(x).\exp\left(\frac{b}{x}\right) \leq a.e^b$$

Conclusion :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq F(x) \leq M = a.e^b$$

Remarque : cette majoration est optimale, car atteinte pour

$$f : x \to a.e^b.e^{-\frac{b}{x}}$$

2.6 Le lemme de Grönwall

Exercice

Soit $I = [a,b]$, c un réel, $u \geq 0$ et f deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq c + \int_a^x f.u$$

Montrer que

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq c.\exp\left(\int_a^x u\right)$$

Méthode : utiliser

$$F(x) = c + \int_a^x f.u$$

Réponse

En utilisant $u \geq 0$, on montre que

$$F' - F.u \leq 0$$

d'où

$$\forall x \in I,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\exp\left(-\int_a^x u\right) \leq 0$$

puis

$$\forall x \in I,\ F(x)\exp\left(-\int_a^x u\right) \leq F(a) = c$$

donc

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq F(x) \leq c.\exp\left(\int_a^x u\right)$$

D'où le résultat.