Calcul différentiel

Contents

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert Ω d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie E et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie F.

L'espace d'arrivée

On supposera que $F = \mathbb{R}^p$; on notera

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x))$$

Dans le cas général, le choix d'une base de l'espace d'arrivée F permet de se ramener à ce cas.

1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

1.1 Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.

a est un point de Ω et v un vecteur de E.

Notation $D_v f(a)$: c'est la dérivée, au point $t = 0$, de la fonction φ suivante :

$$\varphi : t \to f(a + tv)$$

Donc

$$D_v f(a) = \varphi'(0)$$

Il s'agit d'un vecteur, élément de F.

Comparaison avec la dérivée usuelle ?

Réponse

La dérivée usuelle est le cas particulier où $E = \mathbb{R}$ et $v = 1$.

Si on remplace v par $w = -v$:

$$D_w f(a) = -D_v f(a)$$

si $D_v f(a)$ existe.

Si on remplace v par $w = \lambda v$:

$$D_w f(a) = \lambda . D_v f(a)$$

si $D_v f(a)$ existe.

1.2 Dérivées partielles dans une base

On suppose une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E fixée.

On appelle dérivées partielles de f au point a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a) = D_{e_j} f(a)$$

Cas particulier

Supposons que $E = \mathbb{R}^n$ et que B est la base canonique.

Fonctions partielles de f au point a :

$$g_j : t \to f(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n)$$

Dans ce cas :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a) = D_{e_j} f(a) = g_j'(a_j)$$

1.3 Exemple 1 : $\|\|_2$

$E = \mathbb{R}^n$; $f(x) = \|x\|_2$; étudier les dérivées partielles en 0, en a non nul.

1.4 Exemple 2 : $\|\|_\infty$

Mêmes questions avec $f(x) = \|x\|_\infty$.

1er cas

$a = 0$.

2e cas

Supposons par exemple $a_1 = \|a\|_\infty > |a_j|$ pour tout $j > 1$.

3e cas

Supposons par exemple $a_1 = a_2 = \|a\|_\infty > 0$.

1.5 Exemple 3 : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx} e^{-nt}$

$E = \mathbb{R}^2$.

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx} e^{-nt}$$

où (a_n) est une suite de complexes bornée, puis quelconque.

Etudier l'existence des dérivées partielles.

Réponse

On montre d'abord que f est définie sur $\Omega =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Ensuite, on utilise le théorème usuel pour dériver la somme d'une série de fonctions d'une variable.

Pour x_0 fixé

On étudie la convergence de

$$-\sum n.a_n.e^{inx_0}.e^{-nt}$$

Fixons $t_0 > 0$.

$$\forall t \geq t_0, \left|n.a_n.e^{inx_0}.e^{-nt}\right| \leq n.\left|a_n\right|.e^{-nt_0} \leq Mn.e^{-nt_0} = \alpha_n$$

majorant indépendant de t et terme général d'une série convergente. Donc cette série converge normalement, donc uniformément sur $[t_0, +\infty[$.

On en déduit que la fonction partielle

$$t \to f(t, x_0)$$

est de classe C^1 sur $[t_0, +\infty[$.

Or t_0 est quelconque dans $]0, +\infty[$; on peut conclure que

$$t \to f(t, x_0)$$

est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Pour t_0 fixé

De manière analogue, on montre qu'on peut dériver terme à terme par rapport à x sur $\mathbb{R}$, pour $t_0 > 0$ fixé.

Donc $\partial_2 f$ est définie sur Ω.

1.6 Exemple 4 : $G(u,v,w) = \int_u^v f(w,t)\,\mathrm{d}t$

I et J sont deux intervalles ouverts ; on suppose f et $\partial_1 f$ continus sur $I \times J$ à valeurs réelles ; on pose

$$G(u,v,w) = \int_u^v f(w,t)\,\mathrm{d}t$$

Domaine de définition Ω de G ? Calculer les dérivées partielles de G.

Réponse

$$\Omega = J^2 \times I$$

$$\partial_1 G(u,v,w) = -f(w,u)$$
$$\partial_2 G(u,v,w) = f(w,v)$$
$$\partial_3 G(u,v,w) = \int_u^v \partial_1 f(w,t)\,\mathrm{d}t$$

Etude de $\partial_3 G$

Fixons u_0 et v_0 dans J tels que $u_0 < v_0$. On étudie la dérivabilité de

$$w \to \int_{u_0}^{v_0} f(w,t)\,\mathrm{d}t$$

On cherche donc à dominer :

$$\forall w \in I, \forall t \in [u_0, v_0], |\partial_1 f(w,t)| \leq \varphi(t)$$

On doit se contenter de dominer sur tout segment. On fixe donc un segment $[a,b] \subset I$.

La fonction $\partial_1 f$ est continue sur le compact $K = [a,b] \times [u_0, v_0]$, donc bornée sur K :

$$\forall (w,t) \in K, |\partial_1 f(w,t)| \leq M$$

La fonction constante M est bien intégrable sur $[u_0, v_0]$; le théorème s'applique.

2 Différentielle

2.1 Application différentiable au point a

Définition

f est différentiable au point a s'il existe une application linéaire $u \in L(E,F)$ et une application ε de limite nulle au point 0, vérifiant :

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\,\varepsilon(h)$$

Pour quels h cette formule est-elle valide ?

On écrit aussi le développement limité ainsi :

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + o(h)$$

ou :

$$\forall x \in \Omega, f(x) = f(a) + u(x-a) + o(x-a)$$

Cas particulier

Si on suppose $a = 0$ et $f(a) = 0$, la formule devient

$$f(h) = u(h) + o(h)$$

Autrement dit, f est différentiable au point $a = 0$ si, en un certain sens, f ressemble au voisinage de 0 à une application linéaire ; c'est le cas de presque toutes les fonctions 'usuelles'.

2.2 Continuité

Théorème

Si f est différentiable au point a, f est continue au point a.

2.3 Différentiabilité et dérivée

2.3.1 Théorème

Si f est différentiable au point a, f admet une dérivée selon tout vecteur v, et

$$u(v) = D_v f(a)$$

Démonstration

Notons au voisinage de $t = 0$:

$$\varphi(t) = f(a + tv) = f(a) + u(tv) + \|tv\| \varepsilon(tv)$$

Donc

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t.u(v) + o(t)$$

Donc

$$\varphi'(0) = u(v)$$

2.3.2 Cas particulier des dérivées partielles

On suppose donnée une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E.

Si f est différentiable au point a, les dérivées partielles de f au point a existent, et pour tout j :

$$\partial_j f(a) = u(e_j)$$

2.4 Différentielle

2.4.1 Différentielle en a

Définition

Supposons f différentiable au point a :

$$f(a + h) = f(a) + u(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

Cette application u est unique ; on l'appelle différentielle de f en a, ou application linéaire tangente à f en a ; notation :

$$u = \mathrm{d}f(a)$$

On note aussi

$$u(h) = \mathrm{d}f(a)(h) = \mathrm{d}f(a).h = \mathrm{d}f_a(h)$$

pour signifier

$$(\mathrm{d}f(a))(h)$$

2.4.2 Application différentiable sur un ouvert

Définition

Supposons que $\mathrm{d}f(a)$ existe en tout point a de Ω ; on appelle différentielle sur Ω et on note $\mathrm{d}f$ l'application

$$\begin{array}{c} \Omega \to L(E, F) \\ a \to \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

2.5 Cas particuliers

2.5.1 Application constante

Soit f constante sur Ω ; $\mathrm{d}f(a)$ existe en tout point a et vaut ?

Réponse

$0 \in L(E, F)$.

2.5.2 Restriction à un ouvert d'une application linéaire

Soit $f_1 \in L(E, F)$, Ω un ouvert de E, et f la restriction de f_1 à Ω.

En tout point a de Ω :

$$\mathrm{d}f(a) = f_1$$

2.6 Lien entre différentielle et dérivées partielles

On suppose ici l'existence de la différentielle de f au point a :

$$u = \mathrm{d}f(a)$$

Expression des dérivées partielles

Une base $B = (e_1, e_2, ...e_n)$ de E étant donnée, les dérivées partielles existent au point a.

Pour tout j :

$$\partial_j f(a) = u(e_j) = \mathrm{d}f(a).e_j$$

Il s'agit d'un élément de F.

Réciproquement,

on peut exprimer la différentielle à l'aide des dérivées partielles :

si

$$h = \sum_{j=1}^{n} h_j.e_j$$

alors

$$u(h) = \mathrm{d}f(a).h = \sum_{j=1}^{n} h_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{n} h_j.\partial_j f(a)$$

Matrice jacobienne

Soit f est une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ munis des bases canoniques, différentiable au point a. On appelle matrice jacobienne de f au point a la matrice M de $\mathrm{d}f(a)$.

La j-ième colonne est

$$\mathrm{d}f(a).e_j$$

D'où la formule :

$$m_{i,j} = \mathrm{d}f_i(a).e_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

Si $n = m$, jacobien

C'est le déterminant de la matrice jacobienne.

2.7 Exemples

2.7.1 Cas des fonctions d'une variable

Cas où Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ $(n = 1)$:

La différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f au point a.

$$f'(a) = \mathrm{d}f(a).1$$

2.7.2 Exemple dans $\mathbb{R}^2$

$E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = 2x + 3y + x^2 + y^5$$

Etudier $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, et $\mathrm{d}f$ au point $a = (0,0)$.

Réponse

$\partial_1 f(0,0) = 2$; $\partial_2 f(0,0) = 3$; donc, si $\mathrm{d}f(0,0) = u$ existe, alors

$$u(x,y) = 2x + 3y$$

Réciproquement, si on note $h = (x,y)$, alors $x^2 + y^5 = o(h)$. Explication :

$$\forall (x,y) \in [-1,1]^2,\ \left|x^2 + y^5\right| \leq x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2$$

Matrice jacobienne en a :

$$M = \left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array}\right]$$

Remarque

On verra plus loin que f est de classe C^1, ce qui prouve que f est différentiable.

2.7.3 Exemple : $\|\|_\infty$

$E = \mathbb{R}^n$; $f(x) = \|x\|_\infty$; f est-elle différentiable au point a ?

Réponse

1er cas

$a = 0$. $\mathrm{d}f(a)$ n'existe pas.

2e cas

Supposons par exemple $a_1 = \|a\|_\infty > |a_j|$ pour tout $j > 1$.

Dans ce cas, f coïncide au voisinage de a avec une forme linéaire φ, donc

$$\mathrm{d}f(a) = \varphi$$

3e cas

Supposons par exemple $a_1 = a_2 = \|a\|_\infty > 0$. $\mathrm{d}f(a)$ n'existe pas.

2.7.4 Exemple : carré dans $E = M_n(\mathbb{R})$

$E = M_n(\mathbb{R})$; $f(M) = M^2$; f est-elle différentiable ?

Réponse

$$\forall A, H \in E, f(A+H) = f(A) + AH + HA + H^2$$

Or :

$$\exists c > 0, \forall H \in E, \left\|H^2\right\| \leq c.\|H\|^2$$

Par exemple, pour $\|\|_\infty$:

$$\forall H \in E, \left\|H^2\right\|_\infty \leq n.\|H\|_\infty^2$$

Conclusion :

$$\mathrm{d}f(A).H = AH + HA$$

2.7.5 Exemple exp

$E = M_n(\mathbb{R})$; $f(M) = \exp M$; $a = 0$; montrer que $\mathrm{d}f(0) = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration

$$\forall H \in E, f(H) = f(0) + H + g(H)$$

avec

$$g(H) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{H^k}{k!}$$

On doit montrer que $g(H) = o(\|H\|)$.

On peut choisir une norme sous-multiplicative ; dans ce cas :

$$\forall H \in E, \|g(H)\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = \varphi(\|H\|)$$

avec $\varphi(x) = e^x - 1 - x$; donc $\varphi(x) = o(x)$.

3 Opérations sur les applications différentiables

3.1 Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables

Théorème

Soit f et g fonctions de Ω dans F ; soit λ un réel.

Si $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$ existent, $h = \lambda f + g$ a pour différentielle en a :

$$\mathrm{d}h(a) = \lambda.\mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a)$$

Démonstration

Ecrire les deux développements limités.

3.2 Différentielle de $B(f, g)$ où B est bilinéaire

Ici, $F = F_1 \times F_2$; B est bilinéaire de F vers G.

Lemme

$$\exists C > 0, \forall x \in F_1, \forall y \in F_2, \|B(x, y)\| \leq C \|x\| . \|y\|$$

Voir chapitre 'EVN de dimensions finies'.

Théorème

Soit f fonction de Ω dans F_1 et g fonction de Ω dans F_2 ; soit $h = B(f, g)$:

$$h : x \to B(f(x), g(x))$$

Si $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$ existent, alors $h = B(f, g)$ est différentiable en a, et

$$\mathrm{d}h(a).x = B(\mathrm{d}f(a).x, g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a).x)$$

Démonstration

$$f(a+x) = f(a) + u(x) + o(x)$$
$$g(a+x) = g(a) + v(x) + o(x)$$

Donc

$$h(a+x) = B(f(a) + u(x) + \|x\| \varepsilon_1(x), g(a) + v(x) + \|x\| \varepsilon_2(x))$$

Donc

$$h(a+x) = B(f(a), g(a)) + w(x) + \varphi(x)$$

avec

$$w(x) = B(u(x), g(a)) + B(f(a), v(x))$$

et $\varphi(x) = ?$

3.3 Différentielle d'une composée d'applications différentiables

Hypothèses : f définie sur Ω ouvert de E, à valeurs dans Ω' ouvert de F, et g définie sur Ω' à valeurs dans G.

$$h = g \circ f$$

Théorème

Si $b = f(a)$, si $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(b)$ existent, alors $\mathrm{d}h(a)$ existe, et

$$\mathrm{d}h(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a)$$

Démonstration

On compose les développements limités :

$$f(a+x) = f(a) + u(x) + \|x\| \varepsilon_1(x)$$

$$g(b+y) = g(b) + v(y) + \|y\| \varepsilon_2(y)$$

Donc :

$$h(a+x) = g(f(a) + u(x) + \|x\| \varepsilon_1(x))$$

$$h(a+x) = g(b) + v(u(x) + \|x\| \varepsilon_1(x)) + \|u(x) + \|x\| \varepsilon_1(x)\| \varepsilon_2(u(x) + \|x\| \varepsilon_1(x))$$

En résumé :

$$h(a+x) = h(a) + v(u(x)) + o(x)$$

Corollaire

La matrice jacobienne de h en a est le produit des matrices jacobiennes de f en a et g en b.

3.4 Dérivée d'une composée

Il s'agit d'un cas particulier du précédent : $E = \mathbb{R}$, $\Omega = I$, $f = \gamma$.

Si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si g est différentiable en $\gamma(t)$, alors

$$(g \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}g(\gamma(t)).\gamma'(t)$$

Démonstration

On rappelle que :

$$\gamma'(t) = \mathrm{d}\gamma(t).1$$

Cas particulier essentiel

$$\gamma(t) = x + th$$

On retrouve le résultat connu :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(x+th) = \mathrm{d}g(x+th).h$$

3.5 Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables

Règle de la chaîne

Hypothèses de **3.3** :
- f définie sur Ω ouvert de $E = \mathbb{R}^q$, à valeurs dans Ω' ouvert de $F = \mathbb{R}^p$.
- g définie sur Ω' à valeurs dans G.
- $h = g \circ f$; $b = f(a)$, $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(b)$ existent.
- $(e_1, e_2, ...e_q)$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}^q$.
- $\left(e'_1, e'_2, ...e'_p\right)$ est la base canonique de $F = \mathbb{R}^p$.

On note

$$f(x_1, ..., x_q) = (f_1(x_1, ..., x_q), ..., f_p(x_1, ..., x_q))$$

En abrégé, $f = (f_1, ..., f_p)$; on veut exprimer $\partial_i h(a)$.

On rappelle que

$$\partial_i f(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_i f_j(a) e'_j$$

On calcule :

$$\partial_i h(a) = \mathrm{d}h(a).e_i = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a).e_i = \mathrm{d}g(b).\partial_i f(a)$$

$$= \mathrm{d}g(b).\sum_{j=1}^{p} \partial_i f_j(a) e'_j = \sum_{j=1}^{p} \partial_i f_j(a).\partial_j g(b)$$

4 Cas des applications numériques : $F = \mathbb{R}$

4.1 Gradient

4.1.1 Dualité

Théorème

Soit E un espace euclidien ; soit l une forme linéaire sur E ; il existe un vecteur unique a tel que

$$\forall x \in E,\ l(x) = \langle a, x\rangle$$

Remarque

Si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E :
les coordonnées de a sont les $l(e_j)$.

Démonstration 1

Soit x un vecteur quelconque de E :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j.e_j$$

On calcule $l(x)$; par linéarité :

$$l(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j.l(e_j)$$

On reconnaît un produit scalaire :

$$l(x) = \langle x, a \rangle$$

où a est le vecteur dont les coordonnées sont les $l(e_j)$.

Exercice

Il reste à montrer l'unicité de a.

Démonstration 2

Pour tout a élément de E, notons

$$f_a : x \to \langle a, x \rangle$$

On étudie l'application

$$T : a \to f_a$$

C'est une application linéaire de E dans E^* qui sont de même dimension ; on vérifie facilement que T est injective ; c'est donc un isomorphisme de E sur E^*.

Remarque

T est appelé isomorphisme canonique de E sur E^*.

4.1.2 Gradient

On suppose ici $F = \mathbb{R}$ et E espace euclidien ; donc f est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Si $\mathrm{d}f(a)$ existe, c'est une forme linéaire, donc il existe un unique $g \in E$ tel que

$$\forall v \in E, \mathrm{d}f(a).v = \langle g, v \rangle$$

g est appelé gradient de f au point a, noté grad$f(a)$ ou $\nabla f(a)$.

La formule

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + o(h)$$

s'écrit aussi

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a).h + o(h)$$

4.1.3 Dans une base

Si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E : les coordonnées du gradient sont les dérivées partielles.

4.1.4 Interprétation géométrique du gradient

Si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

4.1.5 En résumé

Supposons pour simplifier un peu que $a = 0$ et $E = \mathbb{R}^3$. Notons $h = (x, y, z)$.

Si $\mathrm{d}f(0)$ existe, alors

$$f(h) = f(0) + \nabla f(0).h + o(h) = f(0) + ux + vy + wz + o(h)$$

avec $\nabla f(0) = (u, v, w)$.

Simplifions encore un peu

Si de plus $f(0)=0$:

$$f(x,y,z)=\nabla f(0).h+o(h)=ux+vy+wz+o(h)$$

Donc f ressemble à la forme linéaire

$$(x,y,z)=h\to\nabla f(0).h=ux+vy+wz$$

4.2 Dérivée d'une composée

Ici, Ω est un ouvert de E, $\gamma:I\to\Omega$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}$.

Alors :

$$\forall t\in I,(f\circ\gamma)'(t)=\nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)$$

4.2.1 Exemple 1

$g(x)=f\left(x,x^2,x^3\right)$; que choisir pour γ ? Exprimer g'.

Réponse

$\gamma(x)=\left(x,x^2,x^3\right)$

$$g'(x)=\partial_1 f\left(x,x^2,x^3\right)+2x.\partial_2 f\left(x,x^2,x^3\right)+3x^2.\partial_3 f\left(x,x^2,x^3\right)$$

En plus court :

$$g'(x)=\partial_1 f+2x.\partial_2 f+3x^2.\partial_3 f$$

4.2.2 Exemple 2

Exprimer la dérivée par rapport à y de $g(x,y)=f\left(x+y,x^2y,x^3+y^3\right)$; que choisir pour γ ?

Réponse

$\gamma(y)=\left(x+y,x^2y,x^3+y^3\right)$

$\partial_2 g(x,y)=\partial_1 f\left(x+y,x^2y,x^3+y^3\right)+x^2.\partial_2 f\left(x+y,x^2y,x^3+y^3\right)+3y^2.\partial_3 f\left(x+y,x^2y,x^3+y^3\right)$

En plus court :

$$\partial_2 g(x,y)=\partial_1 f+x^2.\partial_2 f+3y^2.\partial_3 f$$

4.2.3 Exemple 3 : gradient en coordonnées polaires

Notons $u(t)=(\cos t,\sin t)$; $v(t)=u'(t)=(-\sin t,\cos t)$; soit f différentiable sur Ω ouvert de E ; on pose

$$F:(r,t)\to f(r\cos t,r\sin t)$$

Exprimer les dérivées partielles de F.

Réponse

$\gamma(r)=(r\cos t,r\sin t)=r.u(t)$; $\gamma'(r)=(\cos t,\sin t)=u(t)$; on a donc :

$$\partial_1 F(r,t)=u.\nabla f(r\cos t,r\sin t)$$

De même :

$$\partial_2 F(r,t)=rv.\nabla f(r\cos t,r\sin t)$$

Remarque

(u, v) est orthonormée ; donc le produit scalaire avec u et v donne les coordonnées dans la base (u, v).

On en déduit l'expression de ∇f en coordonnées polaires :

$$\nabla f\left(r\cos t, r\sin t\right) = \partial_1 F\left(r, t\right) u + \frac{1}{r}\partial_2 F\left(r, t\right) v$$

4.3 Dérivées partielles d'une composée

Hypothèses : $b = f(a)$, $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(b)$ existent, $h = g \circ f$; on suppose de plus que g est à valeurs numériques.

On note

$$f\left(x_1, ..., x_q\right) = \left(f_1\left(x_1, ..., x_q\right), ..., f_p\left(x_1, ..., x_q\right)\right)$$

En abrégé, $f = (f_1, ..., f_p)$; alors :

$$\partial_i h\left(a\right) = \sum_{j=1}^{p} \partial_i f_j\left(a\right) . \partial_j g\left(b\right)$$

Avec la notion de gradient :

$$\partial_i h\left(a\right) = \nabla g\left(b\right) . \partial_i f\left(a\right) = \nabla g\left(b\right) . \gamma'\left(0\right)$$

où $\gamma : t \to f\left(a + t.e_i\right)$.

4.4 Application aux ellipses

4.4.1 La fonction $d\left(A, M\right)$

$E = \mathbb{R}^2$; $A = (a_1, a_2)$; $f(M) = d(A, M)$; $\mathrm{d}f(M)$?

Réponse

Prenons $A = 0$ pour simplifier. Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$.

$$\forall M = (x, y) \in U, f\left(M\right) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Donc :

$$\forall \left(x, y\right) \in U,\ \partial_1 f\left(x, y\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \partial_1 f\left(x, y\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En particulier, $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ existent et sont continues sur U ; on verra plus loin que cela entraine l'existence de $\mathrm{d}f$ sur U.

En résumé :

$$\forall X \in U, \nabla f\left(X\right) = \frac{X}{\|X\|_2}$$

4.4.2 Ellipses

Soit γ un paramétrage régulier d'une ellipse de foyers F et F' ; existence ? Définition bifocale de l'ellipse ?

Réponse

$$\gamma\left(t\right) = \left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right) = \left(a.\cos t, b.\sin t\right)$$

$$\left\{M \in E / FM + F'M = 2a\right\}$$

4.4.3 Dérivation

Notons $f(M) = d(F, M)$ et $g(M) = d(F', M)$;

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(\gamma(t)) + g(\gamma(t)) = 2a$$

Dérivée par rapport à t ?

Réponse

$$\gamma'(t) \,.\, (\nabla f(\gamma(t)) + \nabla g(\gamma(t))) = 0$$

4.4.4 Conclusion

La tangente à l'ellipse au point M est bissectrice des droites (M, F) et (M, F').

4.5 Points critiques

4.5.1 Définition

C'est un point où $\mathrm{d}f(a) = 0$.

4.5.2 Rappel

Soit f dérivable sur un intervalle I à valeurs réelles ; en un extremum a, $f'(a) = 0$.

Est-ce toujours vrai ?

Réponse

C'est vrai si a n'est pas une borne de I ; démonstration dans le cas d'un minimum :

Si $x \in I$ et $x > a$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = p(x, a) \geq 0$$

Par passage à la limite

$$f'_d(a) \geq 0$$

De même,

$$f'_g(a) \leq 0$$

Si de plus $f'(a)$ existe, $f'(a) = 0$.

4.5.3 Condition nécessaire pour un extremum

Définition

Soit f est définie sur un ouvert Ω, à valeurs réelles ; on dit que a est un minimum local s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B = B(a, \varepsilon) \subset \Omega$ et

$$\forall x \in B,\ f(x) \geq f(a)$$

Analogue pour maximum local.

Théorème

Si f est définie sur un ouvert Ω, à valeurs réelles, si $\mathrm{d}f(a)$ existe, et si a est un extremum local, alors a est un point critique.

Démonstration

Supposons par exemple que a est un minimum local.

Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B = B(a, \varepsilon) \subset \Omega$ et

$$\forall x \in B, f(x) \geq f(a)$$

Soit $h \in E - \{0\}$; soit $\varphi(t) = f(a + th)$; on veut montrer que

$$\varphi'(0) = \mathrm{d}f(a).h = 0$$

Pour cela, on veut montrer que 0 est un minimum local pour φ.

Or :

$$\forall t \in \left]-\delta, \delta\right[, \varphi(t) \geq \varphi(0)$$

pour quel δ ?

Réponse

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\|h\|}$$

4.6 Des points critiques qui ne sont pas des extremums

$E = \mathbb{R}$; f ?

Réponse

$$f(x) = x^3$$

$E = \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = xy, \; g(x, y) = x^2 - y^2$$

Le seuil de Naurouze.

4.7 Exemple 1

$E = \mathbb{R}^2$.

$$f(x, y) = \cos x + \cos y - \cos(x + y)$$

a) Montrer que f admet un maximum M et un minimum m.

b) Chercher les points critiques de f et déterminer M et m.

Réponse

$M = \frac{3}{2}$, $m = -3$.

4.8 Exemple 2

$E = \mathbb{R}^2$.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$$

On note

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a) Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; f(x, y) \geq \frac{r^4}{2} - 2r^2 = \varphi(r)$$

b) Montrer que f admet un minimum.

c) Chercher les points critiques de f.

d) Déterminer le minimum de f.

Réponse

a) Rappel :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, (u+v)^2 \leq 2\left(u^2+v^2\right)$$

D'où

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^4+y^4 \geq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 = \frac{r^4}{2}$$

b) On choisit $A = f(0,0)$. Il est clair que

$$\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$$

Donc :

$$\exists R > 0,\ \forall r \geq R,\ \varphi(r) \geq A$$

Donc, d'après a) :

$$\|(x,y)\|_2 \geq R \Rightarrow f(x,y) \geq A = f(0,0)$$

f est continue sur le disque fermé $K = D(0,R)$ qui est compact ; soit

$$m = \min_K f$$

$$\forall z \in E \setminus K,\ f(z) \geq A = f(0,0) \geq m$$

car $(0,0) \in K$; donc

$$\min_K f = \min_E f$$

c) Il y a 3 points critiques : $(0,0), (1,-1), (-1,1)$.

d)

$$\min f = -2$$

5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

5.1 Vecteur tangent

Définition

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X, tels que :

$$\gamma(0) = x,\ \gamma'(0) = v$$

Autrement dit, les vecteurs tangents à X en x sont les vecteurs tangents à une courbe tracée sur X au point x.

5.1.1 Exemple 1

X est un ouvert de E. Quels sont les vecteurs tangents à X en x ?

Réponse

Tout vecteur $h \in E$ est tangent à X en tout point x ; par exemple :

$$\gamma(t) = x + t.h$$

Que vaut ε ici ?

X étant ouvert dans E, il existe $\delta > 0$ tel que $B = B(a,\delta) \subset X$; on peut choisir

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\|h\|}$$

5.1.2 Exemple 2

X est un sous espace vectoriel de E.

Quels sont les vecteurs tangents à X ?

Réponse

Soit $x \in X$, $v \in X$ et

$$\gamma : t \to x + tv$$

On constate que $\gamma'(0) = v$.

Conclusion : tout vecteur de X est un vecteur tangent à X en tout point x.

Réciproquement

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[,\ \gamma(t) - \gamma(0) \in X$$

Donc pour tout t non nul :

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \in X$$

X est fermé dans E, car de dimension finie, donc :

$$\gamma'(0) \in X$$

Plus généralement

Si X est un sous espace affine de E :

$$X = a + F$$

où F est un sous-espace vectoriel de E.

Dans ce cas, l'ensemble des vecteurs tangents à X est F.

5.1.3 Exercice

Soit v un vecteur de E tangent à X en x, et λ un réel ; montrer que λv est tangent à X en x.

Démonstration

$$\gamma_1 : t \to \gamma(\lambda t)$$

On parcourt la même courbe sur X avec une vitesse différente.

5.2 Tangente à une courbe paramétrée

5.2.1 Rappel

Soit I un intervalle ; soit $f \in C^1(I, E)$. Soit $X = f(I)$.

On dit que le paramètre $t_0 \in I$ est régulier si $f'(t_0) \neq 0$.

Dans ce cas, $f'(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à X en t_0.

5.2.2 Lien entre les deux définitions

Supposons I ouvert ; choisissons

$$\gamma : \begin{array}{ccc}]-\varepsilon, \varepsilon[& \to & X \\ u & \to & f(t_0 + u) \end{array}$$

On constate que le vecteur tangent $f'(t_0)$ est également tangent au sens de la nouvelle définition.

La réciproque n'est pas vraie.

5.2.3 Un cas particulier

Cas où $E = \mathbb{R}^2$ et où X est le graphe d'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$:

$$X = \{(x, \varphi(x)) \,/\, x \in I\}$$

Que choisir pour γ ?

Réponse

Ici, le point de X est un couple $(x_0, \varphi(x_0)) = (x_0, y_0)$.
Un arc :

$$\gamma(u) = (x_0 + u, \varphi(x_0 + u))$$

Un vecteur tangent au point (x_0, y_0) :

$$(1, \varphi'(x_0))$$

Une équation de la tangente :

$$y - y_0 = \varphi'(x_0) \,.\, (x - x_0)$$

Réciproque

Tout arc γ tracé sur X s'écrit

$$\gamma(t) = (x(t), \varphi(x(t)))$$

D'où

$$\gamma'(t) = (x'(t),\ x'(t) \,.\varphi'(x(t)))$$

vecteur qui est proportionnel à

$$(1,\ \varphi'(x(t)))$$

5.3 Un deuxième cas particulier

5.3.1 Le cas de la dimension 3

Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où X est le graphe d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{(x, y, f(x, y)) \,/\, (x, y) \in \Omega\}$$

En résumé :

$$z = f(x, y)$$

Ici :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$$

avec $a = (x_0, y_0, z_0) = \gamma(0)$.
Dérivons :

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), x'(t) \,.\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t) \,.\partial_2 f(x(t), y(t)))$$

En plus court :

$$\gamma'(t) = (x', y', x'.\partial_1 f + y'.\partial_2 f)$$

$\gamma'(0)$ est donc une combinaison linéaire de

$$(1, 0, \partial_1 f(x_0, y_0))$$

et de

$$(0, 1, \partial_2 f(x_0, y_0))$$

On montre la réciproque et on conclut que l'ensemble des vecteurs tangents à X en a est un plan vectoriel $\vec{P}$.

5.3.2 Le plan tangent

On appelle plan tangent en $a = (x_0, y_0, z_0)$ le plan affine P de direction $\vec{P}$, passant par a.

Une équation cartésienne de ce plan :

$$z - z_0 = (x - x_0)\,\partial_1 f\,(x_0, y_0) + (y - y_0)\,\partial_2 f\,(x_0, y_0)$$

5.4 Cas d'une équation cartésienne

5.4.1 Gradient et lignes de niveau

Théorème

Si F est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E, si X est une ligne de niveau de F, alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de F en x :

$$\vec{T} \perp \nabla F$$

Démonstration

Soit γ vérifiant les conditions :

γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, dérivable en 0 à valeurs dans X, tel que :

$$\gamma\,(0) = x,\ \gamma'\,(0) = v$$

Alors :

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, F\,(\gamma\,(t)) = C$$

Dérivons par rapport à t :

$$\nabla F\,(\gamma\,(t))\,.\gamma'\,(t) = 0$$

5.4.2 Application

Soit X un ensemble défini par une équation cartésienne $F\,(x, y, z) = 0$; en un point x de X où le gradient est non nul, ce théorème permet de déterminer le plan tangent.

En électrostatique ?

5.4.3 Exemple : $F\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$.

$\nabla F\,(x_0, y_0, z_0) = 2\,(x_0, y_0, z_0)$ est non nul en tout point de X ; d'où une équation du plan tangent :

$$x.x_0 + y.y_0 + z.z_0 = R^2$$

5.4.4 5.3 comme cas particulier de 5.4

Ici :

$$F\,(x, y, z) = f\,(x, y) - z$$

$$\nabla F = (\partial_1 f, \partial_2 f, -1)$$

est non nul en tout point de X ; on retrouve l'équation du plan tangent.

5.5 Exercice

Soit $a > 0$; soit $h : (x, y, z) \to xyz$ et

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = a, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\right\}$$

a) Nature de C ?

b) Montrer que la restriction h_1 de h à C atteint un maximum et un minimum.

c) Déterminer un vecteur tangent à C en (x, y, z).

d) Montrer qu'en un extremum (x, y, z) de h_1, $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = 0$. En déduire que x, y, z ne sont pas distincts.

e) Déterminer les extremums de h_1.

Réponse

a) Intersection d'un plan et d'une sphère ; c'est un cercle.

b) h_1 est continue sur C compact non vide.

c) $(z - y, x - z, y - x)^T$.

d) Avec les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on trouve que le déterminant vaut

$$(x - y)(y - z)(z - x)$$

e) $\min h_1$ est atteint en $\left(\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, -\frac{1}{3}a\right)$; $\max h_1$ est atteint en $(a, 0, 0)$.

6 Applications de classe C^1

6.1 Définition

Une application f est dite de classe C^1 sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.

6.1.1 Les applications linéaires

Soit $f \in L(E, F)$; f est de classe C^1 sur E car $\mathrm{d}f$ est ?

Réponse

$\mathrm{d}f$ est constante sur E, donc continue.

6.1.2 Composantes

Une application f est de classe C^1 sur un ouvert Ω si et seulement si ses composantes $(f_1, ..., f_p)$ le sont.

6.2 Caractérisation

Théorème (Démonstration non exigible)

Soit Ω un ouvert de E.

L'application f est de classe C^1 sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.

Remarque : ne dépend pas de la base.

6.3 Opérations algébriques

Théorème

Les sommes, produits, composées d'applications C^1 le sont.

6.4 Exemple : $f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx} e^{-nt}$

$E = \mathbb{R}^2$; $f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx} e^{-nt}$ où (a_n) est une suite de complexes bornée.

f est-elle de classe C^1 ?

Réponse

La série dérivée par rapport à t, et la série dérivée par rapport à x convergent normalement sur tout ensemble $\Omega_{t_0} =]t_0, +\infty[\times \mathbb{R}$ si $t_0 > 0$; donc $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues sur Ω_{t_0} ; donc f est de classe C^1 sur Ω_{t_0}.

Finalement, f est de classe C^1 sur $\Omega =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

6.5 Exemple : det

$E = M_n(\mathbb{R})$.

$$f = \det$$

a) Montrer que f est de classe C^1.

b) Calculer les dérivées partielles.

c) Montrer que $\mathrm{d}f(A).H = \mathrm{tr}\left(\tilde{A}H\right)$, où $\widetilde{A}$ désigne la transposée de la comatrice de A.

d) Que dire des vecteurs tangents à $SL_n(\mathbb{R})$?

Démonstration

a) f est de classe C^1 car somme de produits de fonctions de classe C^1 : les formes linéaires coordonnées.

b) On notera $C_{i,j}$ les cofacteurs de A ; autrement dit :

$$\mathrm{com}(A) = (C_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Fixons $A \in E$ et i, j. Etudions

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & f(A + t.E_{i,j}) \end{array}$$

En utilisant la linéarité par rapport à la $j-$ième colonne :

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \varphi(t) = \det(A + t.E_{i,j}) = f(A) + t.C_{i,j}$$

Donc $\varphi'(0) = C_{i,j}$; donc

$$\mathrm{d}f_A(E_{i,j}) = C_{i,j}$$

c) En utilisant la linéarité de $u = \mathrm{d}f_A$:

$$u(H) = u\left(\sum_{i,j} h_{i,j} E_{i,j}\right) = \sum_{i,j} h_{i,j}.u(E_{i,j}) = \sum_{i,j} C_{i,j}.h_{i,j} = \mathrm{tr}\left(\tilde{A}H\right)$$

On peut aussi écrire

$$\forall H \in E,\, \mathrm{d}f_A(H) = \langle \mathrm{com}(A), H \rangle$$

ce qui signifie exactement

$$\nabla f(A) = \mathrm{com}(A)$$

d) Soit H un vecteur tangent à $SL_n(\mathbb{R})$ en A. On sait que H est orthogonal à $\nabla f(A)$; ou encore :

$$H \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}f(A)$$

Donc :

$$\langle \mathrm{com}(A), H \rangle = \mathrm{tr}\left(\tilde{A}H\right) = 0$$

6.6 Exemple : $G(u,v,w) = \int_u^v f(w,t)\,\mathrm{d}t$

I et J sont deux intervalles ouverts ; on suppose f et $\partial_1 f$ continus sur $I \times J$ à valeurs réelles ; on pose

$$G(u,v,w) = \int_u^v f(w,t)\,\mathrm{d}t$$

On a déjà calculé les dérivées partielles de G sur $\Omega = J^2 \times I$:

$$\partial_1 G(u,v,w) = -f(w,u)$$
$$\partial_2 G(u,v,w) = f(w,v)$$

$$\partial_3 G(u,v,w) = \int_u^v \partial_1 f(w,t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que G est de classe C^1 sur Ω. On suppose a et b de classe C^1 sur I à valeurs dans J ; exprimer la dérivée par rapport à x de

$$H(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Réponse

$H = G \circ \gamma$ avec

$$\gamma(x) = (a(x), b(x), x)$$

d'où :

$$H'(x) = -a'(x).f(x,a(x)) + b'(x).f(x,b(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \partial_1 f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

6.7 Intégrale curviligne

Théorème

Soit Ω un ouvert de E ; soit f est une application de classe C^1 de Ω dans F. Soit γ est une application de classe C^1 de $[0,1]$ dans Ω.

Si $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Autre notation si $F = \mathbb{R}$:

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

6.8 Fonctions constantes

6.8.1 Théorème

Soit Ω ouvert connexe par arcs, et f une application de classe C^1 de Ω dans F.

f est constante sur Ω si et seulement si $\mathrm{d}f$ est nulle sur Ω.

6.8.2 Démonstration dans le cas où Ω est convexe

Supposons $\mathrm{d}f$ nulle sur Ω.

Soit $a, b \in \Omega$; on applique la formule précédente avec

$$\gamma(t) = (1-t)\,a + tb$$

et on obtient

$$f(a) = f(b)$$

Remarque

La même démonstration s'applique si Ω est étoilé.

6.8.3 Démonstration dans le cas général (hors-programme)

On fixe $a \in \Omega$; on note $X = \{x \in \Omega \setminus f(x) = f(a)\}$.

- X est fermé dans Ω : image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.
- X est ouvert dans Ω : avec le 1er cas.

6.9 Caractère lipchitzien

Exercice

Soit Ω ouvert de E, et f une application de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$.

f est lipchitzienne sur toute boule fermée B contenue dans Ω.

Démonstration

∇f est continu sur B compacte, donc

$$\exists c > 0, \forall x \in B, \|\nabla f(x)\| \leq c$$

Soit $a, b \in B$; on utilise à nouveau

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb$$

et on obtient

$$\|f(b) - f(a)\| \leq c\|b - a\|$$

Donc la restriction de f à B est $c-$lipchitzienne.

Généralisation

On peut remplacer $\mathbb{R}$ par F.

Dans ce cas, il faut aussi remplacer $\nabla f(x)$ par $\mathrm{d}f(x)$.

7 Applications de classe C^k

7.1 Dérivées partielles d'ordre k

Définition

Dérivées partielles d'ordre k. Leur nombre ?

Réponse

q^k, où q est la dimension de E.

Notation

$\partial_{j_l}...\partial_{j_1} f$ ou $\frac{\partial^k f}{\partial_{j_l}...\partial_{j_1}}$.

7.2 Définition

Une application est dite de classe C^k sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.

Remarque

On admet que cela ne dépend pas de la base.

Composantes

Une application f est de classe C^k sur un ouvert Ω si et seulement si ses composantes $(f_1, ..., f_p)$ le sont.

7.3 Théorème de Schwarz

Si f est de classe C^2 sur un ouvert, alors :

$$\forall i, j,\ \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$$

Démonstration non exigible

7.4 Opérations algébriques

Théorème

Les sommes, produits, composées d'applications de classe C^k sont de classe C^k.

Démonstration non exigible

8 Exemples d'équations aux dérivées partielles

8.1 $-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 0\ (E)$

On cherche f C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ vérifiant (E) ; que dire de ∇f ? Que conjecturer pour f ? Quel changement de variables ? Hypothèses sur U ?

8.2 $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + (x - y) f = 0\ (E)$

On cherche f C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ vérifiant (E) ; on suggère le changement de variables suivant :

$u = x + y, v = x - y$, soit $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$.

Ce qui signifie qu'on introduit une autre fonction

$$f^* (u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

Ou encore

$$f(x, y) = f^*(x + y, x - y)$$

(E) devient :

$$\partial_2 f^* (u, v) + \frac{v}{2} f^* (u, v) = 0$$

D'où le résultat :

$$f(x, y) = C(x + y) \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{4}\right)$$

Quelle hypothèse sur U est nécessaire pour conclure ?

8.3 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0\ (E)$

On cherche f C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ convexe vérifiant (E) ; on trouve

$$f(x, y) = A(x) + B(y)$$

8.4 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} . \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ (E)

On cherche f C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ convexe vérifiant (E) ; on utilise le changement de variables suivant :

$$u = x + c.t, v = x - c.t$$

soit $x = \frac{u+v}{2}, t = \frac{u-v}{2c}$; on introduit donc la fonction

$$f^* (u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$$

ou encore

$$f(x,t) = f^* (x + c.t, x - c.t)$$

(E) devient :

$$4\partial_1\partial_2 f^* (u, v) = 0$$

D'où le résultat :

$$f(x,y) = A(x + ct) + B(x - ct)$$

9 Les fonctions homogènes et l'identité d'Euler

Exercice : l'identité d'Euler

Soit $E = \mathbb{R}^n$; soit $U = E - \{0\}$; soit $\alpha \in \mathbb{R}$; soit

$$f : U \to \mathbb{R}$$

On dit que f est $\alpha-$homogène si :

$$\forall x \in U, \forall t > 0, f(tx) = t^\alpha f(x)$$

Soit $f \in C^1 (U, \mathbb{R})$.

Montrer que f est $\alpha-$homogène sur U si et seulement si :

$$\forall x \in U, (\nabla f)(x) . x = \alpha f(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in U, \sum_{j=1}^{n} x_j . \partial_j f(x) = \alpha f(x)$$

Démonstration

Fixons $x \in U$; soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi : &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \to & t^{-\alpha}.f(tx) \end{array}$$

On calcule φ' :

$$\forall t > 0, \varphi'(t) = -\alpha.t^{-\alpha-1}.f(tx) + t^{-\alpha} (\nabla f)(tx) . x = t^{-\alpha-1} (-\alpha f(tx) + (\nabla f)(tx) . tx)$$

f est $\alpha-$homogène sur U si et seulement si pour tout $x \in U$, φ est constante, ce qui permet de conclure.

10 Fonctions harmoniques : unicité sur un disque

Laplacien

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f$$

Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

On dit que f est harmonique si son laplacien est nul : $\Delta f = 0$.

10.1 Lemme

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert ; soit $g \in C^2(I, \mathbb{R})$; si g atteint un maximum en c, alors ?

$$g'(c) = 0 \text{ et } g''(c) \leq 0$$

Démonstration

$$g(c) \geq g(c+h) = g(c) + \frac{h^2}{2} g''(c) + h^2 \varepsilon(h)$$

D'où

$$\forall h \neq 0,\ g''(c) + 2\varepsilon(h) \leq 0$$

Pour conclure, passage à la limite.

10.2 Exercice

Soit

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\right\}$$

Soit $K = \overline{D}$ et $C = Fr(D)$.

Soit $f \in C^0(K, \mathbb{R})$, harmonique sur D, nulle sur C ; alors $f = 0$.

Corollaire

Si deux fonctions T_1 et T_2 sont continues sur $\overline{D}$, harmoniques sur D, et coïncident sur C, alors $T_1 = T_2$.

10.3 Essai de démonstration

Supposons par l'absurde f non nulle ; le maximum (ou le minimum) de f sur K est atteint sur D, et est non nul :

$$M = \max f = f(c_1, c_2) > 0$$

En ce point, d'après le lemme :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leq 0$$

On n'obtient pas de contradiction.

10.4 Amélioration

Fixons $\varepsilon > 0$; posons

$$f_\varepsilon(x, y) = f(x, y) + \varepsilon\left(x^2 + y^2\right)$$

On constate que $\Delta f_\varepsilon =$? Donc le maximum M_ε de f_ε sur K est atteint sur C ; donc $M_\varepsilon \leq \varepsilon$; conclusion ?

Réponse

$\Delta f_\varepsilon = 4\varepsilon > 0$; $f \leq f_\varepsilon$, d'où

$$M = \max f \leq M_\varepsilon \leq \varepsilon$$

Par passage à la limite, $M \leq 0$; donc f est négative sur K.

Le même raisonnement s'applique à $-f$; conclusion : $f = 0$.

11 Fonctions harmoniques en coordonnées polaires

Exercice

Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$; on se donne une fonction f définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On suppose l'existence de deux fonctions g et h non nulles, $g \in C^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, $h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall r \in]0, +\infty[, \forall t \in \mathbb{R}, f(r.\text{cos}t, r.\text{sin}t) = g(r)\, h(t)$$

On cherche à quelles conditions f est harmonique. On se peut se limiter aux fonctions réelles car une fonction est harmonique si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont.

11.1 L'équation

Montrer que $\Delta f = 0$ sur U si et seulement si :

$$\forall r \in]0, +\infty[, \forall t \in \mathbb{R}, r^2 g''(r)\, h(t) + r g'(r)\, h(t) + g(r)\, h''(t) = 0$$

11.2 Etude de h

h vérifie une équation

$$h'' + Ah = 0$$

De plus, h est $2\pi-$périodique ; donc

$$\exists n \in \mathbb{N}, A = n^2$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = C.\cos[n(t - t_0)]$$

11.3 Etude de g

On remplace h'' par $-n^2 h$. On obtient :

$$\forall r \in]0, +\infty[, r^2 g''(r) + r g'(r) - n^2 g(r) = 0$$

Que faire de cette équation ?

Il s'agit d'une équation d'Euler, qui se ramène à une équation différentielle à coefficients constants, par changement de variable : on pose

$$u = \text{ln}r$$

Soit

$$g(r) = z(\text{ln}r)$$

Après un petit calcul :

$$z'' - n^2 z = 0$$

Pour $n \geq 1$

$$z(u) = A.e^{nu} + B.e^{-nu}$$

Puis

$$g(r) = A.r^n + B.r^{-n}$$

Pour $n = 0$

$$g(r) = A.\text{ln}r + B$$

Donc

$$f(X) = A.\text{ln}r + B = A.\ln|X| + B$$

Trouverait-on le même résultat en dimension 3 ?

11.4 Résultats

Pour $n \geq 1$:

$$\forall r \in \left]0, +\infty\right[, \forall t \in \mathbb{R}, f\left(r.\mathrm{cos}t, r.\mathrm{sin}t\right) = \left(A.r^n + B.r^{-n}\right)\cos\left[n\left(t - t_0\right)\right]$$

Si on cherche les fonctions à valeurs complexes, on peut aussi écrire :

$$\forall r \in \left]0, +\infty\right[, \forall t \in \mathbb{R}, f\left(r.\mathrm{cos}t, r.\mathrm{sin}t\right) = \left(A.r^n + B.r^{-n}\right)\left[c_1 e^{int} + c_2 e^{-int}\right]$$

Finalement, si on identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, on trouve des fonctions très simples :

$$z \to z^n$$

et

$$z \to \overline{z}^n$$

Vérification

Il est immédiat de constater que

$$(x, y) \to (x + iy)^n$$

est harmonique.

Pour aller plus loin

Soit f la somme d'une série entière ; on montre que $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont harmoniques ; réciproquement, toute fonction harmonique sur un disque de centre 0 est la partie réelle de la somme d'une série entière.