Intégration sur un intervalle quelconque

Contents

Les fonctions sont à valeurs dans K, corps des réels ou des complexes.

1 Intégrabilité des fonctions positives sur un intervalle $I = [a, b[$

1.1 Définition

Soit f continue par morceaux de $I = [a, b[$ dans $\mathbb{R}+$; on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente, ou que f est intégrable, si la fonction

$$F : x \to \int_a^x f$$

a une limite finie en b.

Si tel est le cas, on note $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ cette limite.

Remarque

L'intégrale $\int_a^b f$ est convergente si et seulement si la fonction

$$F : x \to \int_a^x f$$

est majorée.

1.2 Exemples

$\int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x = ?$ $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = ?$ $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = ?$ $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$? $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x.\ln x} = ?$

Réponses

$\int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x = 1$; $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = 2$.

1.3 Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $I = [a, b[$ dans $\mathbb{R}+$.

1) Si $0 \leq f \leq g$ et si g est intégrable, alors f est intégrable.

2) Si f est dominée par g au voisinage de b, et si g est intégrable, alors f est intégrable.

3) Si $f \sim g$ au voisinage de b, l'intégrabilité de f équivaut à celle de g.

Démonstration

Notons $G : x \to \int_a^x g$.

1) F est majorée par G qui est majorée sur I, donc F est majorée.

2) Le cas précédent se généralise aisément au cas où $f \leq C.g$ où C est une constante. Si f est dominée par g au voisinage de b, cela signifie que $0 \leq f \leq C.g$ sur un voisinage de b.

3) Si $f \sim g$ au voisinage de b, chacune des deux est dominée par l'autre.

1.4 Les intégrales de Riemann

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; soit $I = [1, +\infty[$; soit $f : x \to \frac{1}{x^\alpha}$; f est intégrable sur I si seulement si $\alpha > 1$; dans ce cas :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

1.5 Exercice : les intégrales de Bertrand

Etudier l'existence de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x, \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \mathrm{d}x, \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^{1,5}} \mathrm{d}x, \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x.\ln x}, \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x.(\ln x)^2}, \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$$

1.6 Comparaison à $\frac{1}{x}$

Soit f continue positive sur $I = [1, +\infty[$; on suppose que $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$; peut-on conclure que $\int_1^{+\infty} f$ converge ?

On suppose que $\int_1^{+\infty} f$ converge ; peut-on conclure que $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$?

Réponse

Non pour les deux ; pour le premier : $f(x) = \frac{1}{x.\ln x}$; pour le deuxième : des chapeaux suffisamment pointus.

Cas où f est décroissante

On suppose que $\int_1^{+\infty} f$ converge et que f est décroissante ; montrer que :

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Démonstration

Soit $x \geq 2$:

$$F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f \geq \frac{x}{2} f(x) \geq 0$$

2 Intégrabilité des fonctions positives sur un intervalle quelconque

2.1 Cas où $I =]a, b]$

Soit f continue par morceaux de $I =]a, b]$ dans $\mathbb{R}+$; on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente, ou que f est intégrable, si la fonction

$$F : x \to \int_x^b f$$

a une limite finie en a.

Si tel est le cas, on note $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

2.2 Cas où $I =]a, b[$

Soit f continue par morceaux de $I =]a, b[$ dans $\mathbb{R}+$; soit $c \in I$; on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente, ou que f est intégrable, si f est intégrable sur $[c, b[$ et sur $]a, c]$.

Remarque

On vérifie facilement que ça ne dépend pas de c.

2.3 Théorème de comparaison

Analogue au cas déjà vu.

2.4 Stricte positivité

Théorème

Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs positives, et d'intégrale nulle, alors f est identiquement nulle.

2.5 Les intégrales de Riemann

$x \to \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Plus généralement :

$$x \to \frac{1}{(x-a)^\alpha}$$

est intégrable sur $]a, a+1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

2.6 Exercice : la fonction Γ

Soit

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1} \mathrm{d}t$$

Chercher le domaine de définition de Γ.

Réponse

Soit x un réel.

- Tout d'abord, on constate que la fonction $f : t \to e^{-t}.t^{x-1}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$ et de signe constant.

- Au voisinage de $+\infty$: $t^2.f(t) = e^{-t}.t^{x+1}$ tend vers 0 (croissances comparées), donc

$$f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

D'après le théorème de comparaison des fonctions positives, f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

- Au voisinage de 0 :

$$f(t) \sim t^{x-1}$$

Intégrable si et seulement si $x > 0$ (intégrale de Riemann).

Conclusion : Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

2.7 Exercice : la fonction β

Soit

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}.(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t$$

Chercher le domaine de définition de β.

Réponse

Soit x, y des réels.

- Tout d'abord, on constate que la fonction $f : t \to t^{x-1}.(1-t)^{y-1}$ est continue sur $I =]0, 1[$.

- Au voisinage de 0 : $f(t) \sim t^{x-1}$; intégrable si et seulement si $x > 0$ (intégrale de Riemann).

- Au voisinage de 1 : analogue.

Conclusion : β est définie sur $]0, +\infty[^2$.

2.8 Exercice : les intégrales de Bertrand

2.8.1 Exemples

Etudier l'existence de :

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x,\ \int_0^1 \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x,\ \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x,\ \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x,\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x.\ln x},\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x.(\ln x)^2},\ \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}.$$

2.8.2 Cas général, au voisinage de $+\infty$

$f(t) = \frac{1}{t^\alpha . \ln^\beta t}$

- si $\alpha > 1$, f est intégrable car $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$, où $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.
- si $\alpha < 1$, f n'est pas intégrable car $\frac{1}{t} = o(|f(t)|)$.
- si $\alpha = 1$, f est intégrable si $\beta > 1$ (on sait calculer une primitive).

2.8.3 Cas général, au voisinage de 0

Ici, $I = \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

$$f(t) = \frac{1}{t^\alpha . |\ln t|^\beta}$$

- si $\alpha < 1$, f est intégrable car $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$, où $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.
- si $\alpha > 1$, f n'est pas intégrable car $\frac{1}{t} = o(|f(t)|)$.
- si $\alpha = 1$, f est intégrable si $\beta > 1$ (on sait calculer une primitive).

3 Intégrale généralisée

3.1 Définition

Soit f continue par morceaux de $I = [a, b[$ dans K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; l'intégrale $\int_a^b f$ est dite convergente si la fonction

$$x \to \int_a^x f$$

a une limite finie en b.

Si tel est le cas, on note $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

3.2 Définition

Soit f continue par morceaux de $I =]a, b]$ dans K ; l'intégrale $\int_a^b f$ est dite convergente si la fonction $x \to \int_x^b$ a une limite finie en a.

Si tel est le cas, on note $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

3.3 Définition

Soit f continue par morceaux de $I =]a, b[$ dans K ; soit $c \in I$; on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge si les deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent.

Si tel est le cas, on note

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Remarque

On vérifie facilement que ça ne dépend pas de c.

3.4 Dérivation

On suppose que f est continue sur $I =]a, b[$ et que $\int_I f$ converge ; dans ce cas

$$x \to \int_a^x f$$

a pour dérivée f ; de même,

$$x \to \int_x^b f$$

a pour dérivée $-f$.

3.5 Linéarité

Dans tous les cas, l'ensemble des fonctions f continues par morceaux de I dans K, telles que l'intégrale $\int_a^b f$ converge, constitue un K-espace vectoriel.

L'application $f \to \int_a^b f$ est linéaire sur cet espace.

4 Intégrabilité

4.1 Définition

Pour f continue par morceaux de I dans K, on dit que f est intégrable, ou que l'intégrale de f est absolument convergente, si l'intégrale $\int_a^b |f|$ est convergente. Autrement dit :

Par définition, f est intégrable si $|f|$ l'est.

4.2 Si f est intégrable, alors $\int_a^b f$ converge

Parties positive et négative d'un réel

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = x$ si $x \geq 0$ et $x^+ = 0$ si $x \leq 0$.

De même, on note $x^- = 0$ si $x \geq 0$ et $x^- = -x$ si $x \leq 0$.

Conséquences :

$$x = x^+ - x^-$$

$$|x| = x^+ + x^-$$

Théorème

Si f est intégrable, alors $\int_a^b f$ converge.

Démonstration

On décompose f en $f = u + iv$; puis u en $u = u^+ - u^-$; v en $v = v^+ - v^-$; toutes les fonctions u^+, u^-, v^+, v^- sont intégrables ; en effet :

$$0 \leq u^+ \leq |u| \leq |f|$$

f est donc une combinaison linéaire de fonctions dont l'intégrale converge.

4.3 Un exemple

Soit $a \in \mathbb{C}$, et

$$f : t \to e^{-at}$$

A quelle condition f est-elle intégrable sur $I = [0, +\infty[$?

Réponse

Si $\mathrm{Re}\,(a) > 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} = \frac{1}{a}$$

4.4 Espace des fonctions intégrables sur I

L'ensemble des fonctions f continues par morceaux intégrables de I dans K constitue un K-espace vectoriel.

C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions f continues par morceaux de I dans K, telles que l'intégrale $\int_a^b f$ converge.

4.5 Inégalité triangulaire

Si f est intégrable sur I, alors $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Démonstration

4.5.1 Si f est à valeurs réelles

$$\forall t \in I, -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

puis on intègre.

On suppose de plus f continue ; quand y a-t-il égalité ?

Réponse

Il y a égalité si f est de signe constant.

4.5.2 Si $\int_I f$ est réel

On note $f = u + iv$;

$$\left|\int_I f\right| = \left|\int_I u\right| \leq \int_I |u| \leq \int_I |f|$$

On suppose de plus f continue ; quand y a-t-il égalité ?

Réponse

Il y a égalité si u est de signe constant et $v = 0$.

4.5.3 Cas général

On note $\int_I f = r.e^{i\theta}$; on pose $g(t) = e^{-i\theta}.f(t)$; on applique le cas précédent à g :

$$r = \left|\int_I f\right| = \left|\int_I g\right| \leq \int_I |g| = \int_I |f|$$

On suppose de plus f continue ; quand y a-t-il égalité ?

Réponse

Il y a égalité si $f(t) = |f(t)|\, e^{i\theta}$ avec θ réel fixé.

4.6 Intégrales semi-convergentes

Si f n'est pas intégrable, et que $\int_a^b f$ converge, on dit que l'intégrale est semi-convergente.

Exemple

$I = [0, +\infty[$; $f(t) = \frac{\sin t}{t}$; $f(0) = ?$

4.6.1 f n'est pas intégrable

Démonstration

$\forall n \geq 2, \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |f| \geq \frac{2}{n\pi}$; d'où :

$$\forall n \geq 2, \int_\pi^{n\pi} |f| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

4.6.2 L'intégrale converge

Démonstration

$$\forall x > 1, \int_1^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t$$

Or $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right|$ est dominé par $\frac{1}{t^2}$, donc intégrable au voisinage de $+\infty$; le crochet et l'intégrale ont donc tous deux une limite finie.

4.6.3 Généralisation

La même méthode s'applique à :
$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t$, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$, $\int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{\ln t} \mathrm{d}t$, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} \mathrm{d}t$,...
Autrement dit, une fonction cos ou sin multipliée par une fonction de classe C^1 décroissante de limite nulle en $+\infty$.

4.7 En résumé

Si f est de signe constant

f intégrable équivaut à l'intégrale de f converge.

Dans le cas général

f intégrable entraîne que l'intégrale de f converge.

5 Propriétés de l'intégrale généralisée

5.1 Changement de variable sur un segment

Théorème

Soit φ une fonction de classe C^1 sur $I = [\alpha, \beta]$, et f une fonction continue sur $\varphi(I)$; alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, \mathrm{d}u$$

Remarque

La monotonie de φ n'est pas nécessaire.

5.2 Changement de variable sur un intervalle

Théorème

Etant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction

$$\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$$

bijective, strictement croissante et de classe C^1, les intégrales $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, \mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, \mathrm{d}u$$

Démonstration

On applique le théorème précédent, puis passsage à la limite.

Si φ est strictement décroissante

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, \mathrm{d}u$$

5.3 Exercice : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x$$

Montrer l'existence de I ; ensuite calculer I à l'aide de

$$I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x$$

Réponse

Avec un changement de variable et la relation de Chasles :

$$\forall a > 0, I\left(a\right) = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \mathrm{d}x = \int_a^{2a} \frac{e^{-u}}{u} \mathrm{d}u$$

Donc :

$$\forall a > 0,\ e^{-2a}.\int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}u}{u} = e^{-2a}.\ln 2 \leq I\left(a\right) \leq \int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln 2$$

Conclusion :

$$I = \ln 2$$

Par la même méthode, si $a > 0, b > 0.$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \mathrm{d}x = \ln \frac{b}{a}$$

5.4 Intégration par parties

Théorème

On suppose f et g de classe C^1 sur $I = \left]a, b\right[$; on suppose aussi que $f.g$ possède des limites finies en a et en b ; alors

$$\int_a^b f.g' = \left[f.g\right]_a^b - \int_a^b f'.g$$

pourvu que l'une des deux intégrales converge.

Remarque

Le résultat se généralise facilement au cas où f et g sont continues et C^1 par morceaux.

Attention

Le résultat ne se généralise pas au cas où f et g sont seulement C^1 par morceaux.

Même si $f = 1$!

5.5 Continuité uniforme et convergence de l'intégrale

Définition

On dit que f est uniformément continue sur A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, \left\|x - y\right\| \leq \delta \Rightarrow \left\|f\left(x\right) - f\left(y\right)\right\| \leq \varepsilon$$

Exercice

On suppose que f est uniformément continue sur $I = \left[a, +\infty\right[$ et que $\int_a^{+\infty} f$ converge ; montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Démonstration

Fixons $\varepsilon > 0$; soit $\delta > 0$ associé par la continuité uniforme ; partons de :

$$\forall t \in \left[x, x + \delta\right], f\left(x\right) = f\left(x\right) - f\left(t\right) + f\left(t\right)$$

En intégrant :

$$\left|\int_x^{x+\delta} f\left(x\right) \mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_x^{x+\delta} \left(f\left(x\right) - f\left(t\right)\right) \mathrm{d}t\right| + \left|\int_x^{x+\delta} f\left(t\right) \mathrm{d}t\right|$$

$$\left|\int_x^{x+\delta} f(x)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{x+\delta} |f(x)-f(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_x^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\delta\,|f(x)| = \left|\int_x^{x+\delta} f(x)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon.\delta + \left|\int_x^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

puis :

$$|f(x)| \leq \varepsilon + \frac{1}{\delta}\left|\int_x^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \varepsilon + \frac{1}{\delta}\,|F(x+\delta)-F(x)|$$

Conclusion ?

$$\exists x_0 > a, \forall x > x_0, |f(x)| \leq 2\varepsilon$$

6 Intégration des relations de comparaison, cas convergent

6.1 Théorème

Soit f et g continues par morceaux de $I = [a, b[$ dans K. On suppose de plus :

- g réelle positive.
- Les deux fonctions intégrables sur I.

On note $F(x) = \int_x^b f$ et $G(x) = \int_x^b g$. Alors, au voisinage de b :

Si $f = o(g)$, alors $F = o(G)$; de même si $f \sim g$, ou si f est dominée par g.

Démonstration

On suppose $f = o(g)$ au voisinage de b.

Soit $\varepsilon > 0$; soit $x_0 \in I$ tel que : $\forall x \geq x_0, |f(x)| \leq \varepsilon.g(x)$; alors :

$$\forall x \geq x_0, |F(x)| \leq \varepsilon.G(x)$$

Cas où $f \sim g$

Dans ce cas, $f - g = o(g)$; le cas précédent montre que $F - G = o(G)$; donc

$$F \sim G$$

6.2 Exemple

Soit f continue sur $\mathbb{R}$; on suppose que $\lim\limits_{+\infty} f = a \in \mathbb{R}$; soit

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

Montrer l'existence de $F(x)$ pour $x > 0$; que dire de F au voisinage de $+\infty$?

Réponse

Si $a = 0$: $F(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$; si $a \neq 0$: $F(x) \sim \frac{a}{x}$.

Réponse correcte dans les deux cas ?

Réponse

$$\lim_{x\to+\infty} x.F(x) = a$$

7 Intégration des relations de comparaison, cas divergent

7.1 Théorème

Soit f et g continues par morceaux de $I = [a, b[$ dans K. On suppose de plus :

- g réelle positive.
- g non intégrable.

On note $F(x) = \int_a^x f$ et $G(x) = \int_a^x g$. Alors, au voisinage de b :

Si $f = o(g)$, alors $F = o(G)$; de même si $f \sim g$, ou si f est dominée par g.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$; soit $x_0 \in I$ tel que : $\forall x \geq x_0, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.g(x)$; soit $x \geq x_0$;

$$|F(x)| = \left|\int_a^x f\right| \leq |F(x_0)| + \left|\int_{x_0}^x f\right| \leq |F(x_0)| + \int_{x_0}^x |f| \leq |F(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^x g$$

Donc

$$|F(x)| \leq |F(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2}(G(x) - G(x_0)) = C + \frac{\varepsilon}{2}G(x)$$

D'où

$$\forall x \geq x_0, \frac{|F(x)|}{G(x)} \leq \frac{C}{G(x)} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour conclure... ?

Réponse

Puisque G tend vers $+\infty$:

$$\exists x_1 > x_0, \forall x \geq x_1, \frac{|F(x)|}{G(x)} \leq \varepsilon$$

7.2 Exemple 1

Soit f fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose que $\lim\limits_{+\infty} f' + f = 0$; montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Démonstration

On utilise $g(x) = e^x.f(x)$.

Au voisinage de $+\infty$,g vérifie $g'(x) = o(e^x)$; exp est positive non intégrable sur $[0, +\infty[$; donc

$$g(x) - g(0) = o(e^x - 1)$$

D'où

$$e^x.f(x) = o(e^x)$$

D'où le résultat.

7.3 Exemple 2

Trouver un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$$

Réponse

$$\forall x > 0, F(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$$

Avec le théorème : $\int_1^x \frac{e^t}{t^2} \mathrm{dt} = \mathrm{o}(F(x))$.

Conclusion :

$$F(x) \sim \frac{e^x}{x}$$