Séries

Contents

1 Le cas général

F désigne un espace normé de dimension finie.

1.1 Convergence

1.1.1 Définition

Soit $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$; on note

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

(s_n) est appelée suite des sommes partielles de la série $\sum u_k$.

On dit que $\sum u_k$ converge si la suite (s_n) converge.

Dans ce cas on appelle somme de la série la limite s de (s_n) .

On la note

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

1.1.2 Restes

On suppose que $\sum u_k$ converge.

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On définit

$$r_p = \sum_{k=p+1}^{\infty} u_k$$

comme la limite quand q tend vers $+\infty$ de la suite :

$$(t_q) = \left(\sum_{k=p+1}^{q} u_k \right)_{q \geq p+1}$$

On remarque que

$$\forall q > p,\, t_q = s_q - s_p$$

ce qui prouve que $(t_q)_{q \geq p+1}$ converge, et

$$r_p = s - s_p$$

Il en découle que $(r_p)_{p \geq 0}$ tend vers 0.

1.1.3 Divergence grossière

Si la série $\sum u_k$ converge, alors (u_n) tend vers 0.

Si (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

Démonstration

$$\forall n \geq 1, u_n = s_n - s_{n-1}$$

1.1.4 Exemples

Des exemples de séries divergentes dont le terme général tend vers 0 :

- $u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- $u_n = \frac{1}{n}$

1.1.5 Linéarité

L'ensemble des suites $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n$ converge est un sous-espace vectoriel C de $F^{\mathbb{N}}$.

L'application suivante est linéaire :

$$(u_n) \in C \to \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Corollaire

Que dire de la nature de la somme de deux séries ? De trois séries ?

1.2 Lien suite-série

Que dire de l'application suivante T de $F^{\mathbb{N}}$ dans $F^{\mathbb{N}}$

$$T : (u_n) \to (s_n)$$

Réponse

T est un automorphisme d'espace vectoriel de $F^{\mathbb{N}}$.
L'application réciproque $(s_n) \to (u_n)$ est définie par $u_n = s_n - s_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $u_0 = s_0$.

Remarque

Soit $(v_n) \in F^{\mathbb{N}}$; la suite (v_n) et la série $\sum v_n - v_{n-1}$ sont de même nature.

2 Séries numériques positives

2.1 Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) des suites de réels positifs.
1) Si pour tout n, $0 \leq u_n \leq v_n$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2) Se généralise au cas où (u_n) est dominée par (v_n).
3) Si $u_n \sim v_n$, les deux séries sont de même nature.

Démonstration

Supposons (u_n) dominée par (v_n) :

$$\exists M > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq M.v_n$$

Notons $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $t_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$; alors :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq s_n \leq s_{n_0} + M. \sum_{k=1+n_0}^{n} v_k$$

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq s_n \leq s_{n_0} + M.t_n$$

(s_n) est donc croissante et majorée, donc converge.

2.2 Règle de d'Alembert

2.2.1 Théorème

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs ; on suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ tend vers L.
- si $0 \leq L < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- si $L > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

2.2.2 Démonstration

Cas où $0 \leq L < 1$: on fixe a tel que $L < a < 1$.
A partir d'un certain rang p, $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a$; d'où

$$\forall n \geq p,\ 0 \leq u_n \leq u_p.a^{n-p} = C.a^n$$

La série converge par comparaison à une série géométrique convergente.
Cas où $L > 1$: à partir d'un certain rang p, $1 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$; d'où

$$\forall n \geq p, u_n \geq u_p > 0$$

La série diverge grossièrement.

2.2.3 Exemples

$\frac{2^n}{n!}$; $\frac{n}{2^n}$; $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{\sqrt{n!}}$.

2.3 Comparaison série-intégrale

Ici, f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}+$.

2.3.1 Lemme

$$\forall n \geq 1, f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f \leq f(n-1)$$

en sommant :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

ou

$$\int_{1}^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f$$

Cas fréquent

Le cas où f n'est pas continue en 0 :

$$\int_{1}^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_{1}^{n} f$$

2.3.2 Théorème

Pour $n \geq 1$, posons

$$a_n = \int_{n-1}^{n} f - f(n) = \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n))\,\mathrm{d}t$$

La série $\sum a_n$ converge.

Démonstration

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq a_n \leq f(n-1) - f(n)$$

Notons $u_n = f(n-1) - f(n)$ pour $n \geq 1$.

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} u_k = f(0) - f(n)$$

Donc $\sum u_n$ converge.

La série $\sum a_n$ converge donc par comparaison à une série positive convergente.

2.3.3 Un exemple

$f(t) = \frac{1}{t}$; que vaut $A_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$?

Réponse

$$A_n = \sum_{k=2}^{n} a_k = \ln n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Remarque

Soit
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ \gamma_n = H_n - \ln n$$
D'après le théorème, (γ_n) converge vers une limite qu'on note γ (constante d'Euler).

2.4 Les séries de Riemann

Théorème

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Cas où $\alpha > 1$:
$$s_n \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$
Cas où $\alpha = 1$:
$$s_n \geq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n$$
Cas où $\alpha < 1$: se ramène au précédent, car $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

2.5 Exercice : les séries de Bertrand

2.5.1 Exemples de séries de Bertrand

$\frac{\ln n}{n^3}$, $\frac{\ln n}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}.\ln n}$, $\frac{1}{n.\ln n}$.

2.5.2 Le cas général : nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha.\ln^\beta n}$

Si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge :
$u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$, où $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$
Si $\alpha < 1$, la série diverge :
$\frac{1}{n} = o\left(u_n\right)$
Si $\alpha = 1$, la série converge si $\beta > 1$, par comparaison à une intégrale.

2.6 Comparaison à $\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice

Soit (u_n) une suite de réels positifs ; on suppose que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Peut-on conclure que $\sum u_n$ converge ?
On suppose que $\sum u_n$ converge.
Peut-on conclure que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$?

Réponse

Non pour les deux ; pour le premier :
$$u_n = \frac{1}{n \ln n}$$
Pour le deuxième : $u_n = \frac{1}{n}$ si n est une puissance de 2, 0 sinon.
$$u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_4 = \frac{1}{4}, u_8 = \frac{1}{8}...$$
$(n.u_n)$ vaut 1 pour une infinité de valeurs de n, mais $\sum u_n$ converge.

Cas où (u_n) est décroissante

On suppose que $\sum u_n$ converge et que (u_n) est décroissante ; montrer que

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Démonstration

Soit $n \geq 2$; soit $p = p_n = E\left(\frac{n}{2}\right)$.

$$s_n - s_{p-1} = \sum_{k=p}^{n} u_k \geq (n-p+1)\, u_n \geq \frac{n}{2} u_n \geq 0$$

Donc $(n.u_n)$ tend vers 0 par encadrement.

2.7 La règle de Raabe-Duhamel

Exercice

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où α est un réel.

Le critère de d'Alembert ne permet pas de connaître la nature de $\sum u_n$.

Néanmoins

- Si $\alpha > 1$, la série converge.
- Si $\alpha < 1$, la série diverge.

Démonstration

Le critère de d'Alembert consiste à comparer à une série géométrique.

Ici, on compare à une série de Riemann.

Cas où $\alpha > 1$

On choisit un réel β tel que

$$1 < \beta < \alpha$$

On va comparer u_n à $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. On pose donc

$$w_n = \frac{u_n}{v_n} = u_n.n^\beta$$

On calcule :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta = \left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Donc

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - \frac{\alpha-\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc (w_n) est décroissante à partir d'un certain rang n_0:

$$\forall n \geq n_0,\, w_n \leq w_{n_0}$$

Soit

$$\forall n \geq n_0,\, 0 \leq u_n \leq \frac{C}{n^\beta}$$

Or $\beta > 1$, donc la série $\sum u_n$ converge.

Le cas $\alpha < 1$ est analogue.

3 Séries absolument convergentes

3.1 Définition

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum \|u_n\|$ converge.

3.2 Théorème

Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration

Dans le cas des séries de réels : analogue au cas des intégrales.

$$\forall n \geq 0, u_n = u_n^+ - u_n^-$$

De plus :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$$

Donc $\sum u_n^+$ converge par comparaison de séries positives.

De même, $\sum u_n^-$ converge.

Dans le cas général

On verra plus tard qu'on se ramène au cas des réels à l'aide d'une base de F.

3.2.1 Remarque

Ce théorème ne s'applique pas si F n'est pas de dimension finie.

3.2.2 Définition

Une série convergente mais non absolument convergente est appelée semi-convergente.

Exemples

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$; $\sum \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}$

3.3 Exemple : la fonction η

On pose

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

La série est-elle absolument convergente ? Convergente ?

Réponse

Absolument convergente si $x > 1$; convergente si $x > 0$.

Pour $x \in \mathbb{C}$, absolument convergente si $\operatorname{Re}(x) > 1$.

3.4 Complément : le théorème du point fixe

On dit qu'une fonction est contractante si elle est lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Soit A un fermé de F ; soit $f : A \to A$ contractante.

Alors f possède un unique point fixe c ; de plus, toute suite récurrente définie par

$$u_0 \in A,\ u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers c.

Démonstration

On montre facilement l'unicité du point fixe.

Soit $u_0 \in A$; on définit u_n par $u_{n+1} = f(u_n)$; on montre aisément par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 0, \|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n \|u_1 - u_0\|$$

Par comparaison de séries positives, $\sum \|u_{n+1} - u_n\|$ converge.

Donc $\sum u_{n+1} - u_n$ converge absolument, donc converge, ce qui signifie exactement que (u_n) converge vers une limite $u \in F$.

De plus, A étant fermé dans F, $u \in A$.

Pour finir, f étant continue, (u_n) ne peut converger que vers un point fixe de f.

4 Le critère des séries alternées

4.1 Les suites adjacentes

Soit (u_n) une suite de réels croissante, (v_n) une suite de réels décroissante.

On suppose que $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

Alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Démonstration

$(u_n - v_n)$ est croissante et tend vers 0, donc est négative ; (u_n) est donc majorée par v_0.

4.2 Théorème

Soit (u_n) une suite de réels décroissante et convergeant vers 0.

Alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge (c'est le critère des séries alternées).

Démonstration

(s_{2n}) est décroissante, (s_{2n+1}) est croissante, et la différence tend vers 0.

Remarque

$$0 \leq u_0 - u_1 \leq u_0 - u_1 + u_2 - u_3 \leq ... \leq S \leq ... \leq u_0 - u_1 + u_2 \leq u_0$$

4.3 Signe de la somme

$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ est positif.

Démonstration

$S \geq s_1 = u_0 - u_1 \geq 0$.

Généralisation

Soit $(u_n)_{n \geq p}$ une suite de réels décroissante et convergeant vers 0.

Alors la somme

$$S = \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n u_n$$

est du signe du premier terme : celui de $(-1)^p$.

4.4 Majoration de la somme

Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$; $0 \leq S \leq u_0$; en particulier :

$$|S| \leq u_0$$

Généralisation

Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite de réels décroissante et convergeant vers 0.

Alors la somme

$$S = \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n \, u_n$$

est majorée par le premier terme : $|S| \leq u_p$.

4.5 Exemple 1

Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$?

Réponse

Converge d'après le TSA.

4.6 Exemple 2

Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n+5\sin n}$?

Réponse

$$\frac{(-1)^n}{n+5\sin n} = \frac{(-1)^n}{n} - 5\,(-1)^n \frac{\sin n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série converge.

4.7 Exemple 3

Nature de

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

Réponse

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comment conclure ?

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - v_n$$

avec

$$v_n \sim \frac{1}{n}$$

C'est donc la somme d'une série convergente et d'une série divergente.

4.8 Un contre-exemple

Trouver des suites (u_n) et (v_n) équivalentes, telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient de natures différentes.

Réponses

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

5 Sommation des relations de comparaison, cas convergent

5.1 Théorème

Soit (a_n) et (b_n) deux suites de réels ou de complexes. On suppose
- (b_n) réelle positive à partir d'un certain rang.
- $\sum b_n$ convergente.
- $a_n = o\,(b_n)$.

On note

$$A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k,\ \ B_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k$$

Dans ces conditions :

$$A_n = o\,(B_n)$$

De même si $a_n \sim b_n$, ou si (a_n) est dominée par (b_n).

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$; soit n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |a_n| \leq \varepsilon b_n$$

Alors :

$$\forall n \geq n_0, |A_n| \leq \varepsilon B_n$$

Remarque

Convergence de $\sum a_n$?

Réponse

$\sum a_n$ converge car elle est absolument convergente.

5.2 Exemple 1

Trouver un équivalent de

$$u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3 + k\sqrt{k}}$$

Réponse

Soit

$$v_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

$u_n \sim v_n$; comment trouver un équivalent de (v_n) ?

Par comparaison à une intégrale :

$$v_n \sim \frac{1}{2.n^2}$$

5.3 Exemple 2

Trouver un équivalent de

$$t_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Réponse

On vérifie facilement que

$$u_k = \frac{1}{k!} \sim \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = v_k$$

$\left(\frac{1}{k!}\right)$ est le terme général d'une série positive convergente.
On en déduit que

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$$

Conclusion :

$$t_n \sim \frac{1}{n!}$$

Autre méthode

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle sur $[0,1]$:

$$t_{n+1} = \left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Donc $t_{n+1} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$; donc

$$t_n = \frac{1}{n!} + t_{n+1} = \frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right)$$

Conclusion :

$$t_n \sim \frac{1}{n!}$$

6 Sommation des relations de comparaison, cas divergent

6.1 Théorème

Soit (a_n) et (b_n) deux suites de réels ou de complexes. On suppose
- (b_n) réelle positive à partir d'un certain rang.
- la série $\sum b_n$ divergente.
- $a_n = o(b_n)$.

On note

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Alors $A_n = o(B_n)$.
De même si $a_n \sim b_n$, ou si (a_n) est dominée par (b_n).

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$; soit n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} b_n$$

Soit $n \geq n_0$:

$$|A_n| \leq |A_{n_0}| + \frac{\varepsilon}{2}(B_n - B_{n_0}) = C + \frac{\varepsilon}{2} B_n$$

D'où $\frac{|A_n|}{B_n} \leq \frac{C}{B_n} + \frac{\varepsilon}{2}$; pour conclure... ?

$$\exists n_1 \geq n_0, \forall n \geq n_1,\ \frac{|A_n|}{B_n} \leq \varepsilon$$

6.2 Le lièvre et la tortue

Ici, $a_n = \frac{1}{n}$: la tortue opiniâtre, et $b_n = (-1)^n$: le lièvre inconstant.
Que sont A_n et B_n ? Quelle est la morale ?

6.3 Un premier exemple

On cherche un équivalent simple de

$$s_n = 1! + 2! + ... + n!$$

Méthode élémentaire

$$\forall n \geq 2,\ n! \leq s_n \leq n! + (n-1)! + n.(n-2)!$$

donc

$$\forall n \geq 2,\ 1 \leq \frac{s_n}{n!} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$$

Avec le théorème

$n! \sim n! - (n-1)!$; donc

$$s_n \sim \sum_{k=1}^{n} k! - (k-1)! = n! - 1$$

On retrouve

$$s_n \sim n!$$

6.4 Le lemme de Cesaro

Si (u_n) tend vers a, alors

$$\frac{s_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

tend vers a.

Démonstration

Cas où $a = 0$:
$u_n = o(1)$, donc $s_n = o(n)$.
Cas où $a \in \mathbb{C}$:
se ramène au cas précédent en écrivant $u_n = a + v_n$ avec $\lim\limits_n v_n = 0$.
Cas où $a = +\infty$:
$1 = o(u_n)$, donc $n = o(s_n)$.

6.5 Variantes

6.5.1 $U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.u_k$

Si (u_n) tend vers $a \in \mathbb{C}$, que dire de

$$U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.u_k$$

Réponse

Cas où $a = 0$:
$k.u_k = o(k)$, donc $\sum_{k=1}^{n} k.u_k = o(n^2)$, donc $\lim\limits_n U_n = 0$.
Cas général :
On écrit $u_n = a + v_n$ avec $\lim\limits_n v_n = 0$. Alors

$$U_n = \frac{n(n+1)}{2.n^2}a + V_n$$

Dans tous les cas, (U_n) converge vers $\frac{a}{2}$.

6.5.2 $U_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p.u_k$

On suppose $p > 0$; si (u_n) tend vers $a \in \mathbb{C}$, que dire de

$$U_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p.u_k$$

Réponse

Tout d'abord :

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \sim \frac{1}{p+1} n^{p+1}$$

Se démontre à l'aide d'une somme de Riemann :

$$\frac{1}{p+1} = \int_0^1 t^p \mathrm{d}t = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

De manière analogue aux cas $p = 0$ ou $p = 1$, on montre que

$$\lim_n U_n = \frac{a}{p+1}$$

6.6 Application aux suites récurrentes

6.6.1 $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$

On suppose $0 < u_0$; montrer que (u_n) tend vers 0.

Chercher $\alpha > 0$ tel que $\left(\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}\right)$ converge vers une limite $a > 0$.

Réponse

$$u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} = (\ln(1+u_n))^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} = \left(u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + o\left(u_n^2\right)\right)^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} = u_n^{-\alpha}\left(\left(1 - \frac{1}{2}u_n + o(u_n)\right)^{-\alpha} - 1\right)$$

Donc

$$u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} = u_n^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}u_n + o(u_n)\right)$$

On est conduit à choisir $\alpha = 1$.

Alors : $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $a = \frac{1}{2}$; d'où

$$\frac{1}{u_n} \sim \frac{n}{2}$$

Conclusion :

$$u_n \sim \frac{2}{n}$$

6.6.2 $u_{n+1} = \sin u_n$

On suppose $0 < u_0 < \pi$;

Réponse

De manière analogue : $\alpha = 2$; $a = \frac{1}{3}$; d'où $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$.

Conclusion :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

6.7 $(a_n + 2a_{n+1})$ tend vers 0

Soit (a_n) une suite de réels ; soit

$$b_n = a_n + 2a_{n+1}$$

On suppose que (b_n) tend vers 0.

Exprimer (a_n) en fonction de (b_n), puis montrer que (a_n) tend vers 0.

Démonstration

$$a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k+1} 2^k . b_k + \frac{(-1)^n}{2^n} a_0$$

de plus, $2^k . b_k = o\left(2^k\right)$...

6.8 $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$

Soit (a_n) une suite de réels ; soit

$$b_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

On suppose que (a_n) converge.

Montrer que (b_n) converge vers la même limite.

Démonstration

On suppose que (a_n) converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$; soit n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On découpe la somme en deux :

$$b_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} a_k + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1+n_0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Que dire de

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=1+n_0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Réponse :

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=1+n_0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Que dire de

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} a_k$$

Réponse :

C'est $\frac{1}{2^n} P(n)$, avec P polynôme de degré au plus n_0.

Donc tend vers 0 par croissances comparées.

Donc :

$$\exists n_1 \geq n_0, \forall n \geq n_1, \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Et :

$$\forall n \geq n_1, |b_n| = \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Remarque

Ici, on ne peut pas utiliser le théorème de sommation des relations de comparaison.

7 Un exemple de développement asymptotique

On étudie

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

7.1 Rappel

Soit $f(t) = \frac{1}{t}$; pour $n \geq 2$, posons

$$a_n = \int_{n-1}^{n} f - f(n) = \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n))\,\mathrm{d}t = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}$$

Soit

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} a_k = \ln n - H_n + 1$$

f étant décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on sait que la série $\sum a_n$ converge.

On en déduit que $(\ln n - H_n)$ converge :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

où γ est une constante appelée constante d'Euler.

7.2 2e étape

On pose

$$H_n = \ln n + \gamma + u_n$$

et on cherche à préciser u_n.

On pose

$$v_n = u_n - u_{n-1}$$

Etudier v_n ; qu'en déduire pour u_n ?

Réponse

$$v_n = \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln n$$

D'où $v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Avec le théorème de sommation des relations de comparaison, cas convergent,

on en déduit que

$$u_n \sim \frac{1}{2n}$$

7.3 3e étape

On sait que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + w_n$$

avec $w_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On pose $t_n = w_n - w_{n-1}$; on étudie t_n :

$$t_n \sim \frac{1}{6n^3}$$

On en déduit que

$$w_n \sim -\frac{1}{12n^2}$$

Conclusion

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

8 Complément : la transformation d'Abel : application à $\sum b_n \sin nt$

8.1 Calcul préliminaire

Simpifier

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt$$

Réponse

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(n+1)\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} . \frac{e^{i(n+1)\frac{t}{2}} - e^{-i(n+1)\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = e^{int} . \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ g_n(t) = \sin n\frac{t}{2} . \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

Majoration

Soit $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

$$\forall n \geq 1, |g_n(t)| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$$

majorant indépendant de n.

8.2 La convergence de $\sum b_n \sin nt$

Hypothèse

Soit (b_n) une suite décroissante et qui tend vers 0 ; soit $t \in \mathbb{R}$.
Dans ce cas, $\sum b_n \sin nt$ converge.

Démonstration

Principe : on remplace $\sin kt$ par $g_k(t) - g_{k-1}(t)$.

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt = \sum_{k=1}^{n} b_k \left(g_k(t) - g_{k-1}(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})\, g_k(t) + b_{n+1} g_n(t)$$

on montre ensuite que la série $\sum (b_k - b_{k+1})\, g_k(t)$ converge absolument.

8.3 Quand utiliser une transformation d'Abel ?

Pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$:
- Est-ce-que (u_n) est bien définie ?
- Si oui, est-ce-que (u_n) tend vers 0 ?
- Si oui est-elle de signe constant ?

8.3.1 Cas où (u_n) est de signe constant

Règle de d'Alembert, comparaison à une série de Riemann, comparaison à une intégrale,...

8.3.2 Cas où (u_n) n'est pas de signe constant

Est-elle absolument convergente ?
- Si oui, elle est convergente
- Sinon, peut-on appliquer le critère des séries alternées ?
- Sinon, peut-on calculer un développement limité ?
- Sinon, on peut peut-être envisager une transformation d'Abel...

9 Exercices sur les produits infinis

9.1 $p_n = \prod_{k=0}^{n} \cos \frac{a}{2^k}$

Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; soit

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \cos \frac{a}{2^k}$$

Montrer que (p_n) converge, puis trouver sa limite.

Idée

Utiliser $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$;

Réponse

$$L = \frac{\sin 2a}{2a}$$

Remarque

La limite n'est pas nulle.

9.2 $p_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + a_k)$

Soit (a_n) une suite de réels positifs ; soit

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + a_k)$$

Montrer que (p_n) converge si et seulement si $\sum a_n$ converge.

Démonstration

$\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum \ln (1 + a_n)$ converge.
Peut-on dire que :
(p_n) converge si et seulement si $(\ln p_n)$ converge ?

9.3 $p_n = \prod_{k=0}^{n} (1 - a_k)$

Soit (a_n) une suite de réels ; on suppose que :

$$\forall n \geq 0,\ 0 \leq a_n < 1$$

Soit

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} (1 - a_k)$$

Montrer que (p_n) converge vers une limite non nulle
si et seulement si
$\sum a_n$ converge.

Remarque

Un exemple est

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \cos \frac{a}{2^k}$$

Démonstration

$\sum a_n$ converge
SSI
$\sum \ln(1-a_n)$ converge
SSI
$(\ln p_n)$ converge
SSI
(p_n) converge vers une limite non nulle.

9.4 Un produit infini caché

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que $\sum u_n$ diverge.

On note

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Soit

$$a_n = \frac{u_n}{s_n}$$

Montrer que $\sum a_n$ diverge.

Démonstration

On remarque que

$$a_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n} = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_n}$$

On suppose que (a_n) tend vers 0.

$$a_n \sim -\ln(1-a_n) = \ln\left(\frac{s_n}{s_{n-1}}\right)$$

terme général d'une série qui diverge, donc $\sum a_n$ diverge.

9.5 Généralisation à $\mathbb{C}$

Soit (z_n) une suite de complexes ; soit

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} (1+z_k)$$

Montrer que si $\sum z_n$ converge absolument, alors (p_n) converge.

Démonstration

Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$; on montre que (p_n) est bornée, par

$$M = \exp(S)$$

On remarque que

$$p_n - p_{n-1} = p_{n-1}.z_n$$

Comment conclure ?

Réponse

$$|p_n - p_{n-1}| = O\left(|z_n|\right)$$

Par comparaison de séries à termes positifs :

$\sum |p_n - p_{n-1}|$ converge.

$\sum p_n - p_{n-1}$ est donc absolument convergente,

donc convergente,

ce qui signifie que (p_n) converge.