Endomorphismes

1 $u \circ v = -v \circ u$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Montrer que n est pair si et seulement si il existe deux automorphismes u et v tels que $u \circ v = -v \circ u$.

Indications

Si $u \circ v = -v \circ u$, utiliser le déterminant. Pour la réciproque, on peut utiliser $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2 $p \circ q = 0$

Soit p et q deux projecteurs d'un espace E de dimension finie n tels que $p \circ q = 0$.

Montrer que $\text{rg}p + \text{rg}q \leq n$; montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur dont on donnera l'image et le noyau. Chercher une réduction commune à p et q.

Indications

$\text{Im}q \subset \ker p$; donc $\text{rg}q \leq \dim \ker p = n - \text{rg}p$; donc

$$\text{rg}p + \text{rg}q \leq n$$

Ensuite on calcule $(p + q - q \circ p)^2$ et on trouve $p + q - q \circ p$.

Soit $x \in \ker r$: $r(x) = 0$; d'où $p(r(x)) = 0$; avec $p \circ q = 0$, on en déduit $p(x) = 0$; d'où $q(x) = 0$. On obtient :

$$\ker r \subset \ker p \cap \ker q$$

L'autre inclusion est facile.

Si $x \in \text{Im}p$, $r(x) = x$.

Si$x \in \text{Im}q$, alors $x \in \ker p$ et on trouve aussi $r(x) = x$; donc

$$\text{Im}p + \text{Im}q \subset \text{Im}r$$

L'autre inclusion est facile.

Réduction commune

On vérifie que $\ker p = \text{Im}q \oplus (\ker p \cap \ker q)$, d'où

$$E = \text{Im}p \oplus \text{Im}q \oplus (\ker p \cap \ker q)$$

On en déduit une représentation matricielle de p et q par blocs.

3 Projecteurs nilpotents

Soit E un espace vectoriel. Quels sont les projecteurs de E qui sont nilpotents ?

4 Sous-espaces stables par un nilpotent

Soit E un $\mathbb{R}-$espace de dimension $n \geq 2$; soit u un endomorphisme de E tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. On fixe $a \in E$ tel que $u^{n-1}(a) \neq 0$.

1. Montrer que $\left(a, u(a), ..., u^{n-1}(a)\right)$ est une base de E.
2. Décrire les images et noyaux de u^k.
3. Trouver les sous-espaces de E stables par u.

Indications

Soit $E_0 = \{0\}$ et
$$E_k = \mathrm{Vect}\left(e_{n-k}, ..., e_{n-1}\right)$$
On montre que
$$E_k = \mathrm{Im} u^{n-k} = \ker u^k$$
Il est clair que pour $0 \leq k \leq n$, E_k est un sous-espace de E de dimension k et stable par u. On va montrer que ce sont les seuls.

Soit F un sous-espace de E de dimension k et stable par u. Soit v l'endomorphisme de F induit par u ; on sait que v est nilpotent d'indice $m \leq \dim F$; donc $m \leq k$; donc :
$$F \subset \ker u^k$$
De plus, F et $\ker u^k$ ont la même dimension k ; donc
$$F = \ker u^k$$
Conclusion : il y a $n+1$ sous-espaces stables par u, les E_k.

5 $A^2B = A$

Soit A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$ de même rang vérifiant $A^2B = A$; montrer que $B^2A = B$.

Remarque

Pas facile.

Réponse

On montre d'abord que $\ker A = \ker B = \ker A^2$. Ensuite :

$A^2B = A$, donc $A^2BA = A^2$, donc $A^2(BA - I_n) = 0$, donc $B(BA - I_n) = 0$.