Suites définies par une équation

1 $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$

Pour $n \geq 1$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1- Montrer que l'équation

$$e^{-x}.P_n\left(x\right) = \frac{1}{2}$$

possède une unique solution a_n dans $]0, +\infty[$.

2- Montrer que (a_n) est croissante.

3- Montrer que (a_n) tend vers $+\infty$.

Indications

1- Soit $f_n : x \to e^{-x}.P_n\left(x\right)$. On montre que f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}+$.

2- On vérifie que $f_{n+1}\left(a_n\right) > \frac{1}{2}$ et on utilise la décroissance de f_{n+1}.

3- On fixe $a > 0$. On montre que $\left(f_n\left(a\right)\right)$ tend vers 1, et on en déduit qu'à partir d'un certain rang, $f_n\left(a\right) > \frac{1}{2}$.

2 $P_n = X^n - n.X + 1$

On note $P_n = X^n - n.X + 1$.

1- Montrer que pour $n \geq 2$ P_n possède une unique racine u_n dans $[0, 1]$.

2- Trouver la limite de (u_n).

3- Trouver un équivalent de (u_n).

4- Trouver un développement asymptotique à deux termes.

Indications

1- Etudier les variations de P_n.

2- $0 \leq u_n = \frac{1}{n}\left(1 + u_n^n\right) \leq \frac{2}{n}$

3- Montrer que (u_n^n) tend vers 0.

4- On trouve

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$$

3 $x_n = \tan x_n$

Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x_n = \tan x_n$.

Trouver la limite, un équivalent, puis un développement limité de (x_n).

Indications

Il est clair que

$$x_n \sim n\pi$$

Ecrivons

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - a_n$$

On remplace :

$$x_n = \tan\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - a_n\right) = \frac{1}{\tan a_n} \sim \frac{1}{a_n}$$

Donc $a_n \sim \frac{1}{n\pi}$, puis :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut continuer :

$$\tan a_n = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\pi\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Conclusion :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

4 $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Pour $n \geq 0$ et x réel, on pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

1- Calculer les racines de f_0, f_1, f_2.
2- Montrer que f_{2n} n'a pas de racines, et f_{2n+1} une seule, qu'on notera r_n.
3- Montrer que

$$\forall n \geq 0, -(2n+2) \leq r_n \leq 0$$

4- Etudier la monotonie de (r_n).
5- Trouver sa limite.

Indications

2- On détermine le tableau des variations de f_n par récurrence sur n.
3- Soit $a_n = -(2n+2)$. On étudie le signe de $f_{2n+1}(a_n)$.

$$f_{2n+1}(a_n) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k . (2n+2)^k}{k!}$$

Dans cette somme, le signe alterne et la valeur absolue augmente ; donc la somme est du dernier terme, négative.

Donc, f_{2n+1} étant croissante :

$$a_n < r_n$$

4- $f_{2n+1}(r_{n-1})$ est du signe de $1 + \frac{r_{n-1}}{2n+1}$, donc, d'après la question précédente :

$$f_{2n+1}(r_{n-1}) > 0$$

Donc, f_{2n+1} étant croissante :

$$r_n < r_{n-1}$$

5- Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé. $(f_n(A))$ tend vers une limite strictement positive, donc

$$\exists n \in \mathbb{N}, f_{2n+1}(A) > 0$$

Alors :

$$r_n \leq A$$

et

$$\forall p \geq n, r_p \leq A$$

Conclusion :

$$\lim_n r_n = -\infty$$

5 $\exp(x) = x^n$

1- Pour $n \geq 4$, montrer que l'équation

$$(E_n) : \exp(x) = x^n$$

admet une unique racine sur $I = [0, 2]$.

2- Conjecturer la limite L de (x_n) à l'aide de Python.

3- Le démontrer.

4- A l'aide de Python, conjecturer les valeurs de a et b telles que

$$x_n = L + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5- Le démontrer.

Indications

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$