Séries à termes positifs

1 $a_n = 2.a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

On définit (a_n) par $a_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 2,\ a_n = 2.a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

1- Montrer qu'on définit ainsi une suite unique.
2- Nature de $\sum \frac{1}{a_n^2}$?

2 $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n.\ln n}$

Trouver la nature de $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n.\ln n}$

Indications

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

3 $\sum (u_n)^n$

On suppose que

$$\forall n \geq 0,\ 0 \leq u_n < 1$$

Que dire de la nature de $\sum (u_n)^n$?

Indications

$u_n = \frac{1}{2}$, $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.

4 $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; nature de $\sum u_n$?

Réponse

$u_n \sim \frac{e}{2n}$; par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ diverge.

5 $\frac{1}{n}.\ln n.\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Pour $n \geq 2$, soit $u_n = \frac{1}{n}.\ln n.\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; nature de $\sum u_n$?

Réponse

$u_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$; donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$; donc $\sum u_n$ converge.

6 $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Pour $n \geq 2$, soit $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; nature de $\sum u_n$?

Réponse

Soit $v_n = n^2.u_n$ et $w_n = \ln v_n$;

$$w_n = 2.\ln n - \ln n.\ln(\ln n) = \ln n\,(2 - \ln(\ln n))$$

Donc (w_n) tend vers $-\infty$; (v_n) tend vers 0 ; donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui prouve que $\sum u_n$ converge.

7 $a^{-\sqrt{n}}$

Pour $n \geq 2$, soit $u_n = a^{-\sqrt{n}}$; nature de $\sum u_n$?

Réponse

Soit $v_n = n^2.u_n$ et $w_n = \ln v_n$.

$$w_n = 2.\ln n - \sqrt{n}.\ln a$$

On suppose $a > 1$.

Dans ce cas, (w_n) tend vers $-\infty$ par croissances comparées ; (v_n) tend vers 0 ; donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui prouve que $\sum u_n$ converge.

8 $\frac{u_n}{1+u_n}$

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$; montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Réponse

$\forall n \geq 0, 0 \leq v_n \leq u_n$; donc si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

Réciproquement, supposons que $\sum v_n$ converge. Alors (v_n) tend vers 0, $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$, d'où $u_n \sim v_n$; par comparaison de séries positives, $\sum u_n$ converge.

9 $a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$

Soit $a > 0$; on note

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et $u_n = a^{s_n}$; nature de $\sum u_n$?

Réponse

Si $a \geq 1$, la série diverge grossièrement ; on suppose donc $0 < a < 1$.

On sait que : $\forall n \geq 1, \ln n \leq s_n \leq 1 + \ln n$; donc

$$\forall n \geq 1, a.n^{\ln a} \leq u_n \leq n^{\ln a}$$

Par comparaison aux séries de Riemann, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < \frac{1}{e}$.

10 $n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$

Pour $n \geq 2$, soit $u_n = n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$; nature de $\sum u_n$?

Réponse

Soit $v_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$; $v_n = 1 + \frac{A}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $A = \tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$; donc

$$u_n = \exp(-v_n.\ln n) = \exp\left(-\ln n.\left(1 + \frac{A}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-\ln n + o(1))$$

Donc $u_n \sim \frac{1}{n}$; $\sum u_n$ diverge.

11 $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$

Soit (a_n) une suite de réels positifs ; on définit (u_n) par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$$

Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\sum a_n$ converge.

Réponse

Supposons que (u_n) converge vers $u > 0$; alors $\sum u_{n+1} - u_n$ converge ; or $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \sim \frac{a_n}{u}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{a_n}{u}$ converge, donc $\sum a_n$ converge.

Supposons que $\sum a_n$ converge.

$$\forall n \geq 0, 0 \leq \frac{a_n}{u_n} \leq \frac{a_n}{u_0}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{a_n}{u_n}$ converge, donc $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

Conclusion : (u_n) converge.

12 $a_{n+1} = 2.a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}$

On définit (a_n) par $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, et

$$\forall n \geq 1,\ a_{n+1} = 2.a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}$$

Trouver la limite et un équivalent de (a_n).

Réponse

On montre par récurrence sur n que

$$\forall n \geq 0,\ a_n \geq 2^n$$

D'où la limite.

Posons

$$a_n = 2^n.b_n$$

Alors :

$$\forall n \geq 1,\ b_{n+1} = b_n + \frac{b_{n-1}}{4n^2}$$

Il en découle

$$\forall n \geq 1,\ b_{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right) b_n$$

On peut déduire de là que (b_n) est majorée, puis qu'elle converge vers un $C > 0$.

Conclusion :

$$a_n \sim C.2^n$$

13 $\sum u_n^\alpha$

Soit (u_n) une suite positive de limite nulle. Soit E l'ensemble des réels $\alpha > 0$ tels que $\sum u_n^\alpha$ converge.

Montrer que si E n'est pas vide, il est de la forme $]m, +\infty[$ ou de la forme $[m, +\infty[$.

Donner un exemple pour chacun des trois cas.

Indications

Examiner les cas de $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n.\ln^2 n}$, $\frac{1}{\ln n}$.

14 $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}+u_n}$

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, telle que $\left(\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}+u_n}\right)$ converge vers une limite $L \neq \frac{1}{2}$.

Nature de $\sum u_n$?

Indications

1er cas : $L > \frac{1}{2}$

A partir d'un certain rang n_0, $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}+u_n} > \frac{1}{2}$; on montre alors aisément par récurrence sur n que

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq m$$

où $m = \min\left(u_{n_0}, u_{1+n_0}\right)$; donc la série diverge grossièrement.

2e cas : $L < \frac{1}{2}$

Soit $a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + L\right)$; alors $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et, à partir d'un certain rang n_0, $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}+u_n} < a$; on étudie alors les suites (v_n) qui vérifient :

$$\forall n \geq 0, \frac{v_{n+2}}{v_{n+1}+v_n} = a$$

On montre que dans ce cas, $\sum v_n$ converge ; on en déduit que $\sum u_n$ converge.

15 $\sum e_n.\left(\arctan(n+1) - \arctan(n)\right)$

On note $u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$.

1- Etudier la monotonie, la convergence et déterminer un équivalent de (u_n).

Soit $e = (e_n)$ une suite de 0 et de 1. On pose

$$S(e) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n.u_n$$

2- Montrer la convergence de la série et montrer que $0 \leq S(e) \leq \frac{\pi}{2}$.

3- Réciproquement, soit x tel que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Montrer l'existence d'une suite e telle que $x = S(e)$.

Cette suite est-elle unique ?

Indications

1- $\frac{1}{1+(n+1)^2} \leq u_n \leq \frac{1}{1+n^2}$. $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.

3- Quelques notations :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \arctan(n+1),\ r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n+1)$$

On montre d'abord que

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n) \leq r_n$$

en étudiant la fonction

$$\varphi : x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 2.\arctan(x+1) + \arctan(x)$$

Soit x tel que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. On construit la suite e par récurrence. Notons

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} e_k u_k,\ B_n = x - A_n$$

avec $A_{-1} = 0$ et $B_{-1} = x$. A_n représente ce qui est déjà construit, B_n ce qui reste à construire. On souhaite que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq B_n \leq r_n$. On distingue deux cas.

1er cas

Cas où $u_{n+1} \leq B_n$; on choisit $e_{n+1} = 1$; donc

$$B_{n+1} = B_n - u_{n+1} \leq r_n - u_{n+1} = r_{n+1}$$

2e cas

Cas où $u_{n+1} > B_n$; on choisit $e_{n+1} = 0$; donc

$$B_{n+1} = B_n < u_{n+1}$$

Or on sait que $u_{n+1} \leq r_{n+1}$; donc $B_{n+1} \leq r_{n+1}$.

16 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-n.\lfloor\frac{k}{n}\rfloor}{k(k+1)}$

Soit $n\geq 2$ entier. Montrer la convergence et calculer $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-n.\lfloor\frac{k}{n}\rfloor}{k(k+1)}$.

Indications

La convergence est laissée au lecteur.

Pour $q\geq 1$ étudions $s_{nq}=\sum_{k=1}^{nq}\frac{k-n.\lfloor\frac{k}{n}\rfloor}{k(k+1)}$. Après avoir séparé en deux et effectué une transformation d'Abel :

$$s_{nq}=H_{nq+1}-H_q-1+\frac{nq}{nq+1}$$

avec

$$H_q=\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{j}$$

On utilise alors

$$H_q=\ln q+\gamma+o\left(1\right)$$

et on obtient, avec $q\to+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-n.\left\lfloor\frac{k}{n}\right\rfloor}{k\left(k+1\right)}=\ln n$$

17 Calcul de $\exp\left(x\right)$ sans multiplications

Pour $i\in\mathbb{N}$, on pose

$$l_i=\ln\left(1+2^{-i}\right)$$

$N\geq 2$ est un entier fixé ; on suppose les l_i $(0\leq i\leq N-1)$ mémorisés dans un tableau L.

1- Montrer que la série $\sum l_i$ converge. On note

$$S=\sum_{i=0}^{\infty}l_i$$

2- Montrer que

$$\forall i\in\mathbb{N},\ 2.l_{i+1}\geq l_i$$

3- Montrer que

$$\forall i\in\mathbb{N},\ l_i\leq\sum_{k=i+1}^{\infty}l_k$$

4- Pour $u_0\in[0,S]$ on définit la suite (u_i) par
$u_{i+1}=u_i$ si $u_i<l_i$
$u_{i+1}=u_i-l_i$ si $u_i\geq l_i$
Montrer que (u_i) converge vers 0.
5- On définit aussi (v_i) par :
$v_0=1$
$u_{i+1}=u_i$ et $v_{i+1}=v_i$ si $u_i<l_i$
$u_{i+1}=u_i-l_i$ et $v_{i+1}=v_i+2^{-i}.v_i$ si $u_i\geq l_i$
Trouver la limite de (v_i).
6- En déduire une fonction Python qui calcule une approximation A de $\exp\left(u_0\right)$ pour $u_0\in[0,S]$.
Donner un encadrement simple de

$$\frac{e^{u_0}}{A}$$

Indications

4- On vérifie que

$$\forall i \geq 0,\, 0 \leq u_i \leq \sum_{k=i}^{\infty} l_k$$

5- On vérifie que

$$\forall i \geq 0,\, v_i.e^{u_i} = e^{u_0}$$

6- On pose

$$A = v_N$$

Alors :

$$1 \leq \frac{e^{u_0}}{A} = e^{u_N} = 1 + 2^{-N}$$