Séries de fonctions

1 $\sum (-1)^n \exp(-\lambda_n t)$

Soit (λ_n) une suite strictement croissante de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$.

Soit

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \exp(-\lambda_n t)$$

1- Montrer que f est continue sur $I =]0, +\infty[$.
2- Montrer que f est intégrable sur I.
3- Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

Indications

1- Critère des séries alternées et convergence uniforme.
2- Domination facile.
3- TCVD.

2 $\sum \frac{\ln x}{x^n . \ln n}$

Pour $x > 0$, on pose

$$u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n . \ln n}$$

et

$$S(x) = \sum_{k=2}^{\infty} u_k(x)$$

1. Donner le domaine de définition D de S.
2. Montrer que la série ne converge pas normalement sur D.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que

$$\forall x \in D, \left| \sum_{k \geq n+1} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$$

4. Montrer que S est continue sur D.
5. Est-elle intégrable sur D ?

Indications

1. $D = [1, +\infty[$.
2. On trouve que u_n attteint un maximum $M_n = \frac{1}{e.n.\ln n}$ en $c_n = e^{\frac{1}{n}}$.
3. Soit $x \in \overset{o}{D}$. On majore :

$$\forall k \geq n+1, 0 \leq u_k(x) = \frac{\ln x}{x^k . \ln k} \leq \frac{\ln x}{x^k . \ln(n+1)}$$

terme général d'une série géométrique dont on calcule la somme :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \leq \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \cdot \frac{1}{x.\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\ln(n+1)} \cdot \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$$

4. On montre la convergence uniforme à l'aide de **3**.
5. On calcule

$$I_n = \int_1^{\infty} u_n = \frac{1}{(n-1)^2 . \ln n}$$

et on utilise le théorème d'intégration terme à terme.

Calcul de I_n : on peut poser $x = e^u$, puis $u = \frac{v}{n-1}$, et on arrive à

$$\forall n \geq 2,\ I_n = \frac{\Gamma(2)}{(n-1)^2 . \ln n}$$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}x}$

1- Trouver le domaine de définition I de

$$f : x \to \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}x}$$

2- Montrer que f est continue sur I.
3- Montrer que f est de classe C^1 sur I.
4- Trouver un équivalent de f en 0.
5- Trouver la limite puis un équivalent de f en $+\infty$.

Indications

1- Si $x \leq 0$ la série diverge grossièrement.
Pour $x > 0$:

$$n^2 . e^{-\sqrt{n}x} = \exp\left(2.\ln n - x\sqrt{n}\right)$$

qui tend vers 0 par croissances comparées, donc

$$e^{-\sqrt{n}x} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2- On montre la convergence normale de la série sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$:

$$\forall x \geq a, \forall n \geq 1, \left|e^{-\sqrt{n}x}\right| \leq e^{-\sqrt{n}a}$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente.
3- On montre la convergence normale de la série dérivée sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
4- Comparaison à une intégrale : on fixe $x > 0$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t - 1 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}$$

D'où

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

5- On sait que la série converge normalement, donc uniformément sur $[1, +\infty[$; le théorème de la double limite montre alors que f tend vers 0 en $+\infty$.
Ensuite, écrivons

$$\forall x > 0, f(x) = e^{-x} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\sqrt{n}x} = e^{-x} + e^{-x} . \sum_{n=2}^{\infty} e^{-(\sqrt{n}-1)x} = e^{-x} + e^{-x} . g(x)$$

On montre que g tend vers 0 en $+\infty$ (analogue à f). Conclusion :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x}$$

4 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$

Etudier f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$$

1- Trouver le domaine de définition D.
2- Montrer que f est continue sur D.
3- Montrer que f est de classe C^1 sur D.
4- Trouver un équivalent de f en 0.
5- Trouver la limite de f en $+\infty$.
6- Trouver un équivalent de f en $+\infty$. On pourra calculer

$$f(x) + f(x+1)$$

Indications

1- $D =]0, +\infty[$ (critère des séries alternées).
2-

$$\forall n \geq 0, \forall x \in D, \ |r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{x+k}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

majorant indépendant de x et qui tend vers 0.
3- On note

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$$

Alors :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in D, \ |u_n'(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2(x+n)\sqrt{x+n}} \right| \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

D'où la convergence normale sur D.

$$\forall x \in D, \ f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(x+n)\sqrt{x+n}}$$

4-

$$\forall x \in D, \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + r_0(x)$$

et r_0 est continue sur $[0, +\infty[$. Donc :

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

5-

$$\lim_{+\infty} f = 0$$

1e méthode : théorème de la double limite.
2e méthode :

$$\forall x \in D, \ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

6-

$$\forall x \in D, \ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Or $f' \leq 0$, donc :

$$\forall x > -1, \ \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Donc :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Autre méthode :

$$\forall \in D,\ f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} v_p(x)$$

avec

$$\forall \in D,\ v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2p}} - \frac{1}{\sqrt{x+2p+1}}$$

Pour $x \in D$ fixé, la fonction

$$g_x : t \to \frac{1}{\sqrt{x+2t}} - \frac{1}{\sqrt{x+2t+1}}$$

est continue décroissante sur $\mathbb{R}+$. D'où

$$\int_0^{+\infty} g_x \leq f(x) \leq v_0(x) + \int_0^{+\infty} g_x$$

ce qui permet de conclure.

5 $\sum \mathrm{Arctan}(n+x) - \mathrm{Arctan}(n)$

Etudier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Arctan}(n+x) - \mathrm{Arctan}(n)$$

1- Trouver le domaine de définition D.
2- Montrer que f est de classe C^1 sur D.
3- Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Indications

Important :

$$\forall x > 0,\ \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x < 0,\ \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

1- On notera

$$u_n(x) = \mathrm{Arctan}(n+x) - \mathrm{Arctan}(n)$$

Pour $x \geq 0$ fixé :

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{x}{1+n^2}$$

d'après l'inégalité des accroissements finis.

On en déduit que la série converge simplement, et converge normalement sur tout segment $[0,a]$ si $a > 0$.

2- On examine la série dérivée :

$$\sum \frac{1}{1+(n+x)^2}$$

Cette série converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \geq a,\ 0 \leq \frac{1}{1+(n+x)^2} \leq \frac{1}{1+(n+a)^2}$$

majorant indépendant de x et terme général d'une série numérique convergente.

Sur $[0,+\infty[$ le n_0 n'est pas nécessaire.

3- On peut faire une comparaison série-intégrale.

On peut aussi faire une comparaison série-intégrale sur f' :

$$\forall x \geq 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(x+t)^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(x+t)^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(x+t)^2} = [\mathrm{Arctan}(x+t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}\frac{1}{x}$$

D'où

$$f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Conclusion :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$$

6 $\sum \frac{1}{H_n}.t^n.\ln t$

On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

$$u_n(t) = \frac{1}{H_n}.t^n.\ln t$$

et

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$$

1- Trouver le domaine de définition de S.
2- Montrer que la série converge normalement sur tout intervalle $]0, a]$ avec $0 < a < 1$.
3- En est-il de même sur $]0, 1[$?
4- Montrer que S est continue sur $]0, 1]$.
5- S est-elle dérivable sur $]0, 1]$?

Indications

On admet que

$$H_n \sim \ln n$$

1- $D =]0, 1]$.
2- $\varphi : t \to t.\ln t$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée. Notons

$$M = \max|\varphi|$$

$$\forall t \in]0, a], \ |u_n(t)| \leq \frac{M}{H_n}.a^n$$

majorant indépendant de t et terme général d'une série convergente.
3- $|u_n|$ attteint sur $[0, 1]$ en $c_n = \exp\left(-\frac{1}{n}\right)$ un maximum qui vaut

$$m_n = \frac{1}{n.e.H_n} \sim \frac{1}{e.n.\ln n}$$

terme général d'une série divergente.
4- Montrons que la série converge uniformément sur $]0, 1]$:

$$\forall t \in]0, 1], \left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(t)\right| \leq \frac{-\ln t}{H_n}.\sum_{k=n}^{\infty} t^k = \frac{1}{H_n}.\frac{-t^n.\ln t}{1-t} \leq \frac{1}{H_n}.\frac{-t.\ln t}{1-t} \leq \frac{C}{H_n}$$

où C est un majorant sur $[0, 1]$ de $\left|\frac{-t.\ln t}{1-t}\right|$.
5- S n'est pas dérivable en 1 (étudier le taux d'accroissement).

7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2 x}$

Soit

$$f : x \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2 x}$$

1- Montrer que f est définie sur $A = \mathbb{R}^*$.
2- Montrer que pour tout $a > 0$, f est bornée sur $I_a = [a, +\infty[$
3- Montrer que f a une limite finie en $+\infty$.
4- Montrer que f est continue sur A.
5- Montrer que f est bornée sur A. On pourra utiliser $N_x = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
6- Montrer que f a une limite finie en 0.

Indications

1- Comparaison à une série de Riemann :

$$\forall x>0, \forall n\geq 1,\ 0\leq \frac{\sin^2 nx}{n^2x}\leq \frac{1}{x.n^2}$$

f étant paire, on se limitera à $I=]0,+\infty[$.

2-

$$\forall x\in I_a, 0\leq f(x)\leq \frac{1}{a}.\zeta(2)$$

3-

$$\forall x>0, 0\leq f(x)\leq \frac{1}{x}.\zeta(2)$$

Donc f tend vers 0 en $+\infty$.

4-

$$\forall x\in I_a, \left|\frac{\sin^2 nx}{n^2x}\right|\leq \frac{1}{a}.\frac{1}{n^2}$$

majoration indépendante de x par le terme général d'une série convergente ; d'où la convergence normale surI_a,...

5- Pour $x>0$, on note $N_x=\lfloor \frac{1}{x}\rfloor$,

$$s_1(x)=\sum_{n=1}^{N_x}\frac{\sin^2 nx}{n^2x},\ s_2(x)=\sum_{n=1+N_x}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2x}$$

Dans s_1, on majore $\sin^2 nx$ par n^2x^2 ; dans s_2, on majore $\sin^2 nx$ par 1. On obtient :

$$\forall x>0,\ 0\leq s_1(x)=\sum_{n=1}^{N_x}\frac{\sin^2 nx}{n^2x}\leq x.N_x\leq 1$$

$$\forall x\in]0,1[\,,\ 0\leq s_2(x)=\sum_{n=1+N_x}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2x}\leq \frac{1}{x}\sum_{n=1+N_x}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leq \frac{1}{x.N_x}\leq \frac{1}{1-x}$$

s_2 est donc bornée au voisinage de 0.

6- On fixe un réel $\lambda\geq 1$, et on note ici $N_x=\lfloor \frac{\lambda}{x}\rfloor$.

$$\forall x\in]0,1[\,, 0\leq s_2(x)\leq \frac{1}{x.N_x}\leq \frac{1}{\lambda-x}\leq \frac{1}{\lambda-1}$$

Ceci conduit à fixer $\varepsilon>0$, puis λ tel que $0<\frac{1}{\lambda-1}\leq \frac{\varepsilon}{3}$.

8 $u_{n+2}=u_{n+1}+r^n.u_n$

Soit a, b et r trois réels tels que $0<a<b$ et $0<r<1$; on définit une suite par $u_0=a$, $u_1=b$, et

$$u_{n+2}=u_{n+1}+r^n.u_n$$

1- Montrer que la suite (u_n) converge.

2- On note $f(a,b,r)$ la limite de (u_n) ; f est-elle continue ?

Indications

1- On montre par récurrence sur n que :

$$\forall n\geq 0, u_n\geq 0$$

Il en découle que (u_n) est croissante. Ensuite :

$$\forall n\geq 0, u_{n+2}\leq u_{n+1}(1+r^n)$$

D'où :

$$\forall n \geq 0, u_{n+2} \leq u_1. \prod_{k=0}^{n} \left(1 + r^k\right)$$

Posons

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + r^k\right)$$

(p_n) est croissante ; de plus :

$$\forall n \geq 0, p_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + r^k\right) \leq \exp\left(\sum_{k=0}^{n} r^k\right) \leq \exp\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

(p_n) est donc croissante et majorée, donc converge. De même pour (u_n).

2- On fixe $b_0 > 0$ et $r_0 < 1$; on montre que la série $\sum r^n.u_n$ converge normalement sur

$$\left\{(a, b, r) / 0 \leq a \leq b \leq b_0 \wedge 0 \leq r \leq r_0\right\}$$

On en déduit que f est continue.