Rayon de convergence

1 Premiers exemples

Trouver R dans les cas suivants :

$$a_n = 2^n + 3^n + 4^n,\ a_n = 1 + 2^n,\ a_n = \frac{n!}{(2n)!},\ a_n = \frac{e^n}{\sqrt{n!}}$$

2 Que dire de R si

1- $\forall n \geq 1,\ 1 \leq a_n \leq n$?
2- $\forall n \geq 1,\ 1 \leq a_n \leq 2^n$?
3- $\forall n \geq 1,\ 0 \leq a_n \leq 1$?

3 (a_n) strictement positive et croissante

On suppose (a_n) strictement positive et croissante ; que dire de R_a ?

Indications

$\sum a_n$ diverge, donc $R_a \leq 1$; on ne peut pas être plus précis :
$a_n = n!$, ou $a_n = a^n$ avec $a \geq 1$.

4 $a_n = \cos n$

Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, où $a_n = \cos n$.

Indications

Pour $t = 1$, $(a_n.t^n) = (\cos n)$ ne tend pas vers 0 ; donc $\sum a_n$ diverge, donc $R \leq 1$.
Pour $t = 1$, $(a_n.t^n)$ est bornée, donc $R \geq 1$.

$$R = 1$$

Remarque

Pourquoi $(\cos n)$ ne tend pas vers 0 ?

$$\sin 2n = 2.\cos n.\sin n$$

Si $(\cos n)$ tendait vers 0, $(\sin 2n)$ et $(\cos 2n)$ aussi, or $\cos^2 + \sin^2 = 1$...

5 $a_n = n^{\sqrt{n}},\ b_n = n^{\ln n},\ c_n = (\ln n)^{-\ln n}$

Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, où $a_n = n^{\sqrt{n}}$.

Indications

$\sum a_n t^n$ diverge pour $t = 1$; donc $R \leq 1$.

Fixons $t \in]0,1[$; soit $u_n = a_n t^n = n^{\sqrt{n}}.t^n$.

$$\forall n > 0, \ln u_n = \sqrt{n}.\ln n + n.\ln t$$

Par croissances comparées, $(\ln u_n)$ tend vers $-\infty$; donc (u_n) tend vers 0 ; donc $R \geq t$.

Conclusion :

$$R_a = 1$$

On montre également que $R_b = R_c = 1$.

6 $a_n = n^{(-1)^n}$

Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, où $a_n = n^{(-1)^n}$.

Indications

Pour $t = 1$, $(a_n.t^n)$ ne tend pas vers 0 ; donc $\sum a_n$ diverge, donc $R \leq 1$.

Soit $t \in]0,1[$; soit $u_n = a_n.t^n$.

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq a_n t^n \leq n.t^n$$

Donc $(a_n t^n)$ tend vers 0 par croissances comparées ; donc $R \geq t$.

Conclusion :

$$R = 1$$

Autre méthode

On sait que $\sum n.b_n.z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum b_n z^n$; pour $(b_n) = (1)$, on obtient que $\sum n.z^n$ a pour rayon 1.

De plus, ici (a_n) est dominée par (n) ; donc $R \geq 1$.

7 Intensité variable

Trouver R dans les cas suivants :

$$a_n = (2 + (-1)^n)^n\ ,\ a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$$

8 Exemples variés...

Trouver R_a dans les cas suivants :

1- a_n est la $n-$ième décimale de $\sqrt{2}$.

2- a_n est le reste de la division euclidienne de n par 4.

3-

$$a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$$

4-

$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

9 Rayon non nul

Montrer que R_a est non nul si et seulement si la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)$ est majorée.

10 f et f^2

Comparer les rayons de convergence de f et f^2.

Indications

On sait que si $h = f.g$, alors $R_h \geq \min(R_f, R_g)$; donc

$$R_{f^2} \geq R_f$$

Un exemple où $R_{f^2} > R_f$?
Cherchez encore un peu...

Réponse

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$; on montre que $R_f = 1$ et $R_{f^2} = \infty$.

11 $c_{2n} = a_n,\ c_{2n+1} = b_n$

Exprimer le rayon R_c de la série entière $\sum c_n x^n$ en fonction de R_a et R_b si

$$\forall n \geq 0,\ c_{2n} = a_n,\ c_{2n+1} = b_n$$

Indications

Soit $z \in \mathbb{C}$. $(c_n.z^n)$ est bornée si et seulement si $\left(a_n\left(t^2\right)^n\right)$ et $\left(b_n\left(t^2\right)^n\right)$ le sont.
On trouve

$$R_c = \min\left(\sqrt{R_a}, \sqrt{R_b}\right)$$

12 $a_n = \int_0^\pi t^n.\sin t\,\mathrm{d}t$

Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, où $a_n = \int_0^\pi t^n.\sin t\,\mathrm{d}t$.

Indications

On peut montrer que

$$a_n \sim \frac{\pi^{n+2}}{n^2}$$

13 $a_n = \exp(n.\cos n)$

Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, où $a_n = \exp(n.\cos n)$.

Indications

Soit $t = \frac{1}{e}$; il est clair que $(a_n t^n)$ est bornée ; donc $R \geq \frac{1}{e}$.
Pour la suite, on admet l'existence d'une suite d'entiers naturels strictement croissante (n_k) telle que $(\cos n_k)$ converge vers 1. Soit $t \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$. Notons

$$b_n = \ln(a_n.t^n)$$

Alors,

$$b_{n_k} = n_k(\cos n_k + \ln t)$$

est positif à partir d'un certain rang, car $(\cos n_k + \ln t)$ converge vers $1 + \ln t > 0$.
Donc $a_{n_k}.t^{n_k} \geq 1$ à partir d'un certain rang ; donc $\sum a_n t^n$ diverge ; d'où $R \leq t$.
On en déduit $R \leq \frac{1}{e}$. Finalement :

$$R = \frac{1}{e}$$

14 Quelques transformations de séries entières

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R fini non nul. Que dire du rayon de convergence des séries entières suivantes :
1- $\sum n!\,a_n x^n$
2- $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$
3- $\sum a_{2n} x^{2n}$
4- $\sum a_n x^{2n}$
5- $\sum a_{2n} x^n$

15 $P(n) = 2$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$A_n = \{P \in \mathbb{N}[X] / P(2) = n\}$$

1- Montrer que A_n est fini ; on note u_n son cardinal.
2- Montrer que

$$\forall n \geq 0,\ u_{2n+1} = u_{2n}$$

3- Montrer que

$$\forall n \geq 1,\ u_{2n} = u_{2n-1} + u_n$$

4- Montrer que

$$\forall n \geq 0,\ u_{2n} = \sum_{p=0}^{n} u_k$$

5- Ecrire une fonction Python qui renvoie u_p pour $p \in [0, 100]$; peut-on conjecturer le rayon de convergence R de $\sum u_n.x^n$?
6- Montrer que

$$\forall n \geq 0,\ u_{2^n} \leq n + 1 + 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

7- Calculer R.

Indications

1- Soit $P \in \mathbb{N}[X]$ non nul de degré d :

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k.X^k$$

Supposons $P(2) = n$. Alors $d \leq n$ et chaque a_k vérifie

$$0 \leq a_k \leq n$$

Donc A_n est fini et $u_n \leq (n+1)^{n+1}$.
2- Supposons

$$2n + 1 = \sum_{k=0}^{d} a_k.2^k$$

Alors a_0 est impair, et

$$2n = (a_0 - 1) + \sum_{k=1}^{d} a_k.2^k$$

On vérifie qu'on définit ainsi une bijection entre A_{2n+1} et A_{2n} : $P \to P - 1$.
3- Supposons

$$2n = \sum_{k=0}^{d} a_k.2^k = P(n)$$

Remarquons que a_0 est pair.
Si $a_0 \neq 0$:

$$2n - 1 = (a_0 - 1) + \sum_{k=1}^{d} a_k.2^k$$

Si $a_0 = 0$:

$$n = \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1}.2^k$$

4- Par récurrence sur n avec la question précédente.
5- $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ semble converger vers 1 ; on peut conjecturer que $R = 1$.
6- Il y a dans A_{2^n} les $(n+1)$ polynômes $\left(2^k.X^{n-k}\right)_{0 \leq k \leq n}$; examinons les autres :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} a_k.2^k$$

Nécessairement : $0 \leq a_0 \leq 2^n - 1$, $0 \leq a_1 \leq 2^{n-1} - 1$,..., $0 \leq a_{n-1} \leq 2^1 - 1$, et $a_n = 0$.

Nombres de polynômes de cette forme :

$$\prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Mais la valeur de a_0 est déterminée par les autres. Conclusion :

$$\forall n \geq 0,\ u_{2^n} \leq n + 1 + 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

7- On peut utiliser la question précédente, ou directement :

Soit $P \in \mathbb{N}[X]$ non nul de degré d : $P = \sum_{k=0}^{d} a_k.X^k$; supposons $P(2) = n$. On a vu que chaque a_k vérifie

$$0 \leq a_k \leq n$$

De plus,

$$d \leq \log_2(n)$$

Donc $u_n \leq (n+1)^{1+\log_2(n)}$, ce qui permet de conclure que $R = 1$.