Séries entières : exemples

1 Expliciter

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n.x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n^2.x^n$.

Réponse

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x-1}{x}$ si $x \neq 0$.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right)$ si $x > 0$ et $\cos\left(\sqrt{-x}\right)$ sinon.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x}.\ln(1-x)$ pour $x \in \left]-1,1\right[$ en utilisant $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = \left(x + x^2\right).e^x$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
a) Chercher le domaine de définition I de f.
b) Etudier la continuité de f sur I.
c) Chercher les limites de f aux bornes de I.
d) Trouver un équivalent de f.
e) A l'aide de $g(x) = (1-x) f'(x))$, montrer que f est croissante sur I.

Réponse

f est continue sur $I = \left[-1,1\right[$ (TSA) ; pour la limite en 1, remarquer que :

$$\forall x \in \left]0,1\right[, f(x) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Par comparaison à une intégrale : $f(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$ au voisinage de 1.
g(x) =$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) x^n$, positif sur $\left]-1,1\right[$ d'après le TSA.

3 $e^{-x}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.x^n$

Soit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
a) Montrer que (a_n) converge vers une limite L ; majorer $|a_n - L|$.
b) Soit $f(x) = e^{-x}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.x^n$; quel est le domaine de définition de f ?
c) Trouver la limite de f en $+\infty$.
d) Généraliser au cas où (a_n) est une suite convergente quelconque.

Réponse

(a_n) converge (TSA) ; on peut montrer que sa limite L est $\ln 2$; notons $g(x) = e^{-x}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L}{n!} x^n$; on sait que $|a_n - L| \leq \frac{1}{n+1}$ (TSA) ; on en déduit que

$$\forall x > 0, |f(x) - g(x)| \leq e^{-x}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\,n!} = h(x)$$

Or, $g(x) = L$ et $h(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$; conclusion : $\lim\limits_{+\infty} f = L$.
Généralisation : il faut fixer $\varepsilon > 0$,...

4 $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

On pose

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$.

Déterminer R_a et le domaine de définition exact I de f ; expliciter $f(x)$; f est-elle continue aux bornes de I ?

Réponse

a_n existe d'après le critère des séries alternées. La suite (a_n) tend vers 0 (suite des restes d'une série convergente), donc $R_a \geq 1$.

Pour calculer $f(x)$ sur $]-1, 1[$, on écrit

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

puis

$$a_n = -\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} 1.\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

D'où :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, f(x) = \frac{-\ln 2 + \ln(1+x)}{1-x}$$

On constate que $\lim\limits_{-1} f = -\infty$, donc $R_a = 1$.

Méthode directe pour le rayon

Avec le critère des séries alternées :

$$\forall n \geq 0, |a_n| \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n^2}$$

Donc $R_a = 1$.

Etude en 1

On constate aussi que $\lim\limits_{1} f = -\frac{1}{2}$, ce qui ne prouve pas que f est continue au point 1, sauf pour ceux qui connaissent un théorème de Littlewood...

Existence de $f(1)$

On montre que la série $\sum a_n$ vérifie le critère des séries alternées et donc converge.

Continuité de f sur $[0, 1]$

Toujours avec le critère des séries alternées, on montre la convergence uniforme de la série sur $[0, 1]$.

5 $\sum z^{n!}$

Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

Trouver le rayon de convergence R ; montrer que f ne se prolonge par continuité au voisinage d'aucun point z_0 de module 1.

Réponse

$R = 1$; soit $z_0 = \exp(2i\pi\theta_0)$ (θ_0 réel).

On peut approcher θ_0 par un rationnel $\theta = \frac{p}{q}$ ($q \geq 1$). Notons $z = e^{2i\pi\theta}$.

Ensuite, pour $0 < t < 1$, on examine

$$f(tz) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n!} e^{2i\pi \frac{p}{q} n!} = P(t) + \sum_{n=q}^{\infty} t^{n!}$$

P est polynomiale et $\sum_{n=q}^{\infty} t^{n!}$ tend vers $+\infty$ quand $t \to 1^-$.