Séries entières définies par récurrence

1 Les nombres de Catalan

On définit (c_n) par $c_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k.c_{n-k}\ (E_1)$$

1- Montrer que c_n est le nombre de parenthésages d'un produit de $n+1$ termes. Examiner les premières valeurs de la suite.
2- Ecrire une fonction Python qui calcule c_n. Estimer la complexité.
On note

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

3- On note $R = R_c$ le rayon de convergence de cette série.
On suppose que $R_c > 0$. Montrer que

$$\forall x \in \left]-R, R\right[,\ x f^2(x) - f(x) + 1 = 0\ (E_2)$$

4- On pose

$$g(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Montrer que g est la somme d'une série entière et l'expliciter.
5- Montrer que $f = g$.

Indications

1- $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$.
OEIS A000108.
2- On construit la liste $[c_0, ..., c_n]$; complexité quadratique : $O(n^2)$.
3- Le théorème sur le produit de Cauchy donne

$$\forall x \in \left]-R, R\right[,\ f^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n$$

4- On utilise le développement en série entière de

$$u \to (1+u)^{\alpha}$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}$. On trouve $R_g = \frac{1}{4}$ et

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

5- g vérifie (E_2), donc (a_n) vérifie (E_1).
De plus, $a_0 = c_0 = 1$.
Donc les deux suites (a_n) et (c_n) sont les mêmes.
Donc

$$f = g$$

2 Pas r zéros consécutifs

On note $a_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, a_n est le nombre de mots de longueur n composés de 0 et de 1 ne contenant pas r zéros consécutifs. On pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1- Montrer que $R_f > 0$.
2- Trouver une relation de récurrence vérifiée par (a_n).
3- Expliciter $f(x)$.

Indications

2- Pour $n \geq r$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{r} a_{n-k}$$

3 $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$

On définit (a_n) par $a_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$$

1- Trouver la limite de (a_n) ; que peut-on en déduire pour le rayon de convergence R de $\sum a_n.x^n$?
2- Montrer que $a_n \sim a_{n+1}$; que peut-on en déduire pour R ?
3- On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$$

Montrer que f est continue sur $[-1, 1[$.
4- Trouver un équivalent de (a_n), puis un équivalent de f au point 1.

Indications

1- (a_n) tend vers 0, donc $R \geq 1$.
2- Soit $t \in]0, 1[$ et $u_n = a_n.t^n$; $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ tend vers t, donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge ; donc $R \geq t$; finalement :

$$R = 1$$

3- Par théorème, f est continue sur $]-1, 1[$.
Continuité sur $[-1, 0]$: (a_n) étant décroissante, d'après le critère des séries alternées :

$$\forall t \in [-1, 0], \forall n \geq 0, \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k.t^k\right| \leq a_n |t|^n \leq a_n$$

majorant indépendant de t et qui tend vers 0 ; donc la série converge uniformément sur $[-1, 0]$; d'où la continuité de f.
4-

$$a_n \sim \frac{2}{n}$$

d'où

$$f(x) \sim -2.\ln(1 - x)$$

au voisinage de 1, d'après un exercice...

4 $b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k . b_{n-k}$

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$.

On pose pour $n \geq 1$

$$b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k . b_{n-k}$$

On note A et B les sommes des séries entières

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . z^n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n . z^n$$

1- Que dire de R_a ?

2- On suppose $a_1 = 1$. Calculer R_a, R_b, A, B.

3- Montrer que $R_a \geq R_b > 0$.

4- Montrer que sur un voisinage de 0 à préciser :

$$B = A + AB$$

Déterminer R_b.

On suppose désormais que A est un polynôme, et que $0 < a_1 < 1$.

5- Que dire du module des racines de $A - 1$?

Montrer que 1 est la seule de module 1.

Montrer que B est une fraction rationnelle.

6- Montrer que (b_n) converge et trouver sa limite.

Indications

1- $\sum a_n$ converge donc $R_a \geq 1$.

2- $A(x) = x$; $B(x) = \frac{x}{1-x}$. $R_a = \infty$, $R_b = 1$.

3-

$$\forall n \geq 1, \, 0 \leq a_n \leq b_n$$

donc $R_a \geq R_b$.

Ensuite, on montre par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 1, \, 0 \leq b_n \leq 1$$

Donc $R_b \geq 1$.

4- Avec le théorème sur le produit de Cauchy, sur $I = \left]-R_b, R_b\right[$, $B = A + AB$, d'où

$$B(1 - A) = A$$

La formule $B(1-A) = A$ n'est pas vérifiée au point 1 car $A(1) = 1$, donc

$$1 \notin I = \left]-R_b, R_b\right[$$

donc $R_b \leq 1$, donc $R_b = 1$.

5- Avec l'inégalité triangulaire, on montre que les racines de $A - 1$ sont de module supérieur ou égal à 1.

En effet, si $|z| < 1$, alors :

$$|A(z)| \leq \sum_{j=1}^{d} a_j \, |z|^j < \sum_{j=1}^{d} a_j = 1$$

donc $A(z) \neq 1$.

Si $|z| = 1$, il n'y a égalité que si 1 et les $a_j z^j$ sont positivement liés, ce qui n'est possible que si $z = 1$.

On peut écrire

$$A - 1 = (X - 1) Q$$

avec $Q(1) \neq 1$, car 1 est racine simple de $A - 1$; on décompose la fraction :

$$B = \frac{A}{1 - A} = -1 - \frac{1}{A - 1} = -1 - \frac{c}{X - 1} + \frac{P}{Q}$$

6- $\frac{P}{Q}$ admet un développement en série entière avec un rayon $R > 1$.

Donc (b_n) converge vers c, qui vaut ?

On cherche encore un peu...

$$c = \frac{1}{A'(1)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{d} k . a_k}$$

5 Les nombres de Motzkin

Soit $n \geq 2$; soit $A_0, ..., A_{n-1}$ les racines $n-$ièmes de l'unité ; on note M_n le nombre d'ensembles de segments deux à deux disjoints, non réduits à un point, dont les extrémités sont des A_j.

1- Déterminer M_2, M_3, M_4.

2- Montrer que

$$\forall n \geq 1,\ M_{n+1} = M_n + \sum_{j=0}^{n-1} M_j.M_{n-1-j}$$

en précisant M_0 et M_1.

3- Ecrire une fonction Python qui calcule M_n.

4- Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n$; en supposant que le rayon de convergence R est non nul, montrer que

$$\forall x \in \left]-R, R\right[,\ f(x) = 1 + xf(x) + x^2 f(x)^2$$

5- En déduire $f(x)$; justifier que $R > 0$.

Indications

$$f(x) = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2}$$

Cette fonction est somme d'une série entière sur $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$; la suite des coefficients (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (M_n) et possède les mêmes premiers termes ; on en déduit que $(a_n) = (M_n)$, donc $R = \frac{1}{3}$.

6 $u_{n+2} = \frac{u_n + (n+1)u_{n+1}}{n+2}$

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $u_{n+2} = \frac{u_n + (n+1)u_{n+1}}{n+2}$ pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que cette suite converge et calculer sa limite L.

b) Vérifier avec Python.

c) Etudier $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.x^n$.

Indications

a) On constate que

$$u_{n+2} - u_{n+1} = -\frac{u_{n+1} - u_n}{n+2}$$

D'où

$$u_n - u_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

Puis

$$u_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Conclusion :

$$L = 1 - \frac{1}{e}$$

c) (u_n) étant bornée, le rayon R vérifie $R \geq 1$; avec un produit de Cauchy :

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - x}$$