Séries entières et intégrales

1 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}}\mathrm{d}x$

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$$

Indications

Soit

$$f : x \to \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}}$$

f se prolonge par continuité sur $[0,+\infty[$ en posant $f(0) = \frac{1}{3}$.

En $+\infty$: $f(x) \sim x.e^{-2x}$, donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, d'où l'intégrabilité de f. Ensuite :

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[, f(x) = \frac{x.e^{-2x}}{1-e^{-3x}} = x.e^{-2x}.\sum_{k=0}^{\infty} e^{-3kx}$$

Soit

$$I_k = \int_0^{+\infty} \left|x.e^{-(2+3k)x}\right| \mathrm{d}x$$

On pose $x = \frac{u}{2+3k}$, changement de variable C^1 bijectif :

$$\forall k \geq 0,\ I_k = \int_0^{+\infty} x.e^{-(2+3k)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2+3k)^2}\int_0^{+\infty} u.e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{(2+3k)^2}$$

$\sum u_k$ converge, donc le théorème d'intégration terme à terme s'applique, ce qui permet de conclure.

2 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$

1- Montrer l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$.

2- Montrer que

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(4n+1)\,4^n}$$

Indications

1- $f : t \to \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ est continue sur $[0,1[$ et

$$f(1-h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{h}}$$

intégrale de référence.

2- On sait que

$$\forall u \in \left]-1,1\right[,\ (1+u)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$$

avec

$$a_n = \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n . (n!)^2}$$

Donc :

$$\forall t \in [0, 1[\,, \ f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n . (n!)^2} t^{4n}$$

Ensuite intégration terme à terme.

Par exemple, on peut montrer la convergence de $\sum \frac{\binom{2n}{n}}{(4n+1)4^n}$ en remarquant que les sommes partielles sont majorées par $\int_0^1 f$.

3 $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

Chercher le rayon de convergence et la somme de la série $\sum \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$.

On pourra calculer $I_n = \int_0^1 t^n . (1-t)^n \,\mathrm{d}t$.

Indications

$$\lim_n \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{4}$$

On en déduit que

$$R = 4$$

Avec n intégrations par parties, on montre que

$$\forall n \geq 0, \ a_n = I_n$$

Fixons $x \in \left]-4, 4\right[$. On sait que $\sum a_n . x^n$ est absolument convergente.

Soit

$$u_n = a_n . x^n = \int_0^1 t^n . (1-t)^n . x^n \mathrm{d}t$$

et

$$v_n = \int_0^1 |t^n . (1-t)^n . x^n| \,\mathrm{d}t$$

$\sum v_n$ converge. Il en découle que

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} t^n . (1-t)^n . x^n \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 - xt + xt^2}$$

Pour $0 < x < 4$:

$$s(x) = \frac{4}{\sqrt{x(4-x)}} \arctan \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}$$

4 $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \mathrm{d}t$

On définit f par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \mathrm{d}t$$

1. Trouver le domaine de définition D.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur D.
4. Montrer que f est développable en série entière et trouver le rayon de convergence.
5. Calculer $f(x) + f(x+1)$ et trouver un équivalent de f en -1.
6. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.
7. Montrer que f est analytique sur D.

Indications

1. $D =]-1,+\infty[$.
2. On fixe $a > -1$. Domination sur $[a,+\infty[$:

$$\forall x \geq a, \forall t \in I =]0,1[\,,\ 0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$$

et φ est intégrable sur $]0,1[$.

3. On fixe $a > 0$. Domination sur $[a,+\infty[$:

$$\forall x \geq a, \forall t \in I,\ 0 \leq |\ln t| \frac{t^x}{1+t} \leq |\ln t|\, t^a = \varphi_1(t)$$

et φ_1 est intégrable sur $]0,1[$.

4. On fixe $x \in]-1,1[$.

$$\forall t \in I,\ \frac{t^x}{1+t} = \frac{1}{1+t}.e^{x.\ln t} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$

avec

$$u_n(t) = \frac{x^n.(\ln t)^n}{(1+t)\,n!}$$

On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\forall n \geq 0,\ I_n = \int_0^1 |u_n| \leq \frac{|x|^n}{n!} \int_0^1 |\ln t|^n \,\mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{n!}.J_n$$

avec

$$J_n = \int_0^1 |\ln t|^n \,\mathrm{d}t$$

Changement de variable : $t = e^{-u}$.

On obtient

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-u}.u^n \mathrm{d}u = \Gamma(n+1) = n!$$

Conclusion :

$$\forall n \geq 0,\ 0 \leq I_n \leq |x|^n$$

terme général d'une série numérique convergente.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)} \mathrm{d}t$$

5.

$$\forall x > -1,\ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) \underset{x \to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$$

6. Avec une intégration par parties :

$$\forall x \in D,\ f(x) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x+1}.g(x)$$

où

$$g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(1+t)^2} \mathrm{d}t$$

$$\forall x \in D,\ 0 \leq g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(1+t)^2} \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{x+1} = \frac{1}{x+2}$$

Donc, en $+\infty$: $g(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Conclusion :

$$f(x) = \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

7. On généralise la question 4.

On fixe $a \in D$ et $h \in \mathbb{R}$. On remplace x par $a + h$.

$$\forall t \in I,\ \frac{t^x}{1+t} = \frac{t^a}{1+t}.e^{h.\ln t} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$

avec

$$u_n(t) = t^a.\frac{h^n.(\ln t)^n}{(1+t)\,n!}$$

On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\forall n \geq 0,\ I_n = \int_0^1 |u_n| \leq \frac{|h|^n}{n!}\int_0^1 t^a.|\ln t|^n\,\mathrm{d}t = \frac{|h|^n}{n!}.J_n$$

avec

$$J_n = \int_0^1 t^a.|\ln t|^n\,\mathrm{d}t$$

Changement de variable : $t = e^{-u}$.

On obtient

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-u}.e^{-au}.u^n\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(n+1)}{(a+1)^n} = \frac{n!}{(a+1)^n}$$

Conclusion :

$$\forall n \geq 0,\ 0 \leq I_n \leq \left|\frac{h}{a+1}\right|^n$$

terme général d'une série numérique convergente si $\left|\frac{h}{a+1}\right| < 1$.

Conclusion : on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme si $\left|\frac{h}{a+1}\right| < 1$. On obtient que la fonction

$$g : h \to f(a+h)$$

est la somme d'une série entière de rayon $R_a \geq a+1$, ce qui est logique : $a+1$ est le rayon de l'intervalle le plus grand centré en a et contenu dans D.

On peut aussi montrer que $R_a = a + 1$.