Equations différentielles

1 $y' - y = f$

Soit (E) : $y' - y = f$; on suppose f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution h bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que h est intégrable sur $\mathbb{R}$ et exprimer son intégrale en fonction de celle de f.

Réponse

1. Unicité : la différence entre deux solutions bornées est une solution bornée de l'équation homogène ; or

$$x \to C.e^x$$

n'est bornée que si $C = 0$.

Existence : par la méthode de variation de la constante :

$$y(x) = e^x \left(C + \int_a^x e^{-t}.f(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

On choisit

$$h(x) = -e^x \left(\int_x^{+\infty} e^{-t}.f(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

On vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |h(x)| \leq e^x \left(\int_x^{+\infty} e^{-t}.\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \right) \leq e^x.e^{-x}.\int_x^{+\infty} |f| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$$

h est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $A < B$ deux réels.

$$\int_A^B h = \int_A^B h' - f = h(B) - h(A) - \int_A^B f$$

On a déjà vu que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |h(x)| \leq \int_x^{+\infty} |f|$$

ce qui prouve que h tend vers 0 en $+\infty$. Il reste à montrer que h tend vers 0 en $-\infty$. Pour y voir plus clair, on note

$$g(t) = |f(-t)|$$

et on étudie la limite en $+\infty$ de

$$x \to e^{-x}.\int_0^x e^t.g(t)\,\mathrm{d}t$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et x_0 tel que $\int_{x_0}^{+\infty} g \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\forall x \geq x_0,\ 0 \leq e^{-x}.\int_0^x e^t.g(t)\,\mathrm{d}t \leq C.e^{-x} + e^{-x}.\int_{x_0}^x e^t.g(t)\,\mathrm{d}t \leq C.e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc :

$$\exists x_1 > x_0, \forall x \geq x_1,\ 0 \leq e^{-x}.\int_0^x e^t.g(t)\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$$

Donc h tend vers 0 en $-\infty$. On en déduit que l'intégrale de h converge et que

$$\int_{\mathbb{R}} h = -\int_{\mathbb{R}} f$$

Pour montrer que h est intégrable, il suffit d'appliquer ce qui précède avec $|f|$ à la place de f.

2 Solution de limite nulle

Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \alpha . e^{-\lambda x}$$

avec $\alpha > 0, \lambda > 0$. L'équation

$$u'' + u = f$$

possède-t-elle des solutions u de limite nulle ?

Réponse

Avec la méthode de variation des constantes, une seule :

$$u(x) = \cos x . \int_x^{+\infty} f(t) \sin t \mathrm{d}t - \sin x . \int_x^{+\infty} f(t) \cos t \mathrm{d}t$$

3 $u(0)^2 + u'(0)^2 > 1$

Soit $u \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée, telle que $\|u\|_\infty \leq 1$, et $u(0)^2 + u'(0)^2 > 1$.

Montrer que

$$\exists x \in \mathbb{R},\ u(x) + u''(x) = 0$$

Réponse

Notons $v = u + u''$; on résout $u'' + u = v$ à l'aide de la méthode de variation des constantes. On obtient :

$$u(x) = u(0) \cos x + u'(0) \sin x + \int_0^x v(t) \sin(x-t) \mathrm{d}t$$

Ensuite, supposons par exemple $v > 0$ sur $\mathbb{R}$; alors :

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ u(x) \geq u(0) \cos x + u'(0) \sin x$$

Conclusion ?

Peut-on améliorer ?

Soit $\varepsilon > 0$ et

$$u(x) = \frac{\varepsilon + \cos x}{\varepsilon + 1}$$

On vérifie que $\|u\|_\infty = 1$, $u(0)^2 + u'(0)^2 = 1$, et $u + u'' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$ ne s'annule pas.

Autre méthode

On note

$$v = u^2 + u'^2$$

Si par exemple $v'(0) > 0$, on montre que v' s'annule en un point c de $\mathbb{R}^+$: sinon u'^2 serait minoré par $v(0) - 1 > 0$, et u ne serait pas bornée.

On choisit c minimal ; c convient.