Intégrabilité

1 Etudier l'intégrabilité sur]0, +∞[de : $x \to \dfrac{\tanh x}{x}$, $x \to x^\alpha \exp(-\sqrt{x})$, $t \to \dfrac{\ln t}{1+t^2}$, $x \to \ln(\tanh x)$, $x \to \exp(-x\arctan x)$.

2 Etudier l'intégrabilité sur $]0,1[$ des fonctions : $x \to \dfrac{\cosh x - \cos x}{x^\alpha}$, $t \to \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$, $x \to \tan(\dfrac{\pi}{2}x)$.

3 Etudier l'intégrabilité sur [2,+∞[de $f(t) = \exp(-\ln^a t)$ si $a > 0$.

4 Trouver $\lim\limits_n \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + \dfrac{1}{n^2}\sqrt{k(n-k)})$, $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{kn}}$, $\lim\limits_n (2^2 3^3 \ldots n^n)^{\frac{1}{n^2 \ln n}}$, $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$, $\lim\limits_n \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{(2n)!}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}$, $\lim\limits_n \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n+k}{n^2+k^2}$.

5 Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P_n = X^n - 1$. Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $f(z) = \int_0^{2\pi} \ln\left|z - e^{it}\right| dt$; montrer l'existence de $f(z)$ quand $|z| \neq 1$, puis quand $|z| = 1$. Soit z complexe tel que $|z| \neq 1$; calculer $f(z)$ à l'aide d'une somme de Riemann (distinguer les cas $|z| > 1$ et $|z| < 1$).

6 Est-ce que le produit de deux fonctions intégrables est intégrable ?

7 Soit f $C°$ positive, et $n \geq 1$. Montrer que si f^{n+1} et f^{n-1} sont intégrables, alors f^n est intégrable.

8 Existence et calcul de $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ (CHV), de $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-x}}$.

9 Existence, calcul de $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin^2 t}{t^2} dt$. (on admet la valeur de $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt$).

10 Montrer que : $\forall\, x > 0$, $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-y}}{y} dy - \int_0^x \dfrac{1-e^{-y}}{y} dy = -\ln x + \int_0^{+\infty} e^{-y} \ln y\, dy$.

11 Soit f C^1 telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que : $\left|\int_a^b f\right| \leq \dfrac{M_1}{4}(b-a)^2$.

12 Soit a un complexe non réel et $f(t) = \dfrac{1}{t-a}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f$; f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

13 Soit f $C°$ sur $I = [a,b]$. Montrer que $(\int_I f)^2 \leq (b-a)\int_I f^2$. Pour quelles fonctions f y a t-il égalité ?

14 Etudier intégrabilité et semi-convergence sur [4, +∞[de : $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\ln t}$, $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t + \sin t}$, $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\ln t + \sin t}$.

15 Existence, calcul de $\int_0^{\infty} \dfrac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}} du$.

16 Existence et calcul de $\int_0^{\infty} \dfrac{x}{ch^2 x} dx$ (IPP), de $\int_0^{\infty} \ln(1+\dfrac{1}{x^2}) dx$: IPP, intégrer 1.

17 Montrer l'existence de $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{1+x^2}$; calculer I à l'aide du CHV $u = 1/x$ que l'on justifiera.

18 Soit $f \in C°(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ayant des limites finies en $\pm\infty$. Existence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))dt$.

19 f est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, $tf'(t)$ intégrable. Montrer que f a une limite L en $+\infty$, et que si $L = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,f(t) = 0$.

20 Soit f C^1 telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\int_0^a |ff'| \leq \frac{a}{2}\int_0^a f'^2$. (Commencer par le cas où $f' \geq 0$).

21 Soit $E = \mathbb{R}[X]$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$; montrer l'existence d'un unique $A \in E_n$ tel que : $\forall\, P \in E_n$, $\int_0^1 AP = P(0)$;
montrer que A est exactement de degré n. Existe-t-il $A \in E$ tel que : $\forall\, P \in E$, $\int_0^1 AP = P(0)$?

22 Soit f C^1 sur $I = [0,1]$ à valeurs réelles telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leq 1/2\int_0^1 f'^2$.

23 Phénomène de Gibbs : soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$; soit x_n le premier maximum local strictement positif de f_n.
Montrer que $\lim\limits_{n} f_n(x_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$. Tracer les f_n pour $1 \leq n \leq 20$ sur $[0,2\pi]$ avec Python.

24 Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, α et β deux réels et $F = \{ f \in E \,/\, f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta \}$.
a Trouver $\inf\limits_{f\in F} \int_0^1 f'^2$. **b** Soit k un réel ; trouver $\inf\limits_{f\in F} \int_0^1 (f'+kf)^2$.

25 Soit $f(t) = \frac{\sin t}{t^2}$. Limite en 0 de $\int_x^{3x} f$? Même question si $f(t) = \frac{g(t)}{t^2}$ avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = a$.

26 Soit $f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(1) = 0$. Montrer que $\left|\int_0^1 f\right| \leq 1/3\ M_2$.

27 Soit $I = [a,b]$. On considère m segments contenus dans I tels que tout élément de I appartienne à au moins q segments. Montrer qu'un des segments est de longueur au moins $q(b-a)/m$.

28 Soit $I = [0,1]$, $F = \{ u \in C^1(I, \mathbb{R}) \,/\, u(0) = u(1) = 0 \}$; trouver les $f \in C°(I, \mathbb{R})$ telles que :
$\forall\, u \in F$, $\int_0^1 u' f = 0$.

29 Soit $f \in C°(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, bornée ; soit $m_f(x,t) = \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(u)du$ et $M_f(x) = \sup\limits_{t>0} m_f(x,t)$; montrer que
$f(x) \leq M_f(x) \leq \sup f$; montrer que si f est UC, M_f l'est aussi ; montrer que M_f est $C°$.