Intégrale dépendant d'un paramètre

Contents

1 Continuité d'une intégrale à paramètre

1.1 Théorème

1.1.1 Enoncé

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans K. On suppose que

- Pour tout $t \in I$, $f(., t)$ est continue sur A.

- Pour tout $x \in A$, $f(x, .)$ est continue par morceaux sur I, et dominée indépendamment de x : il existe une fonction φ intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors

$$g : x \to \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur A.

1.1.2 Extension

Cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A.

1.1.3 Démonstration

Fixons $a \in A$; soit

$$f_x = f(x, .) \,:\, t \to f(x,t)$$

D'une part, (f_x) converge simplement vers f_a quand x tend vers a, d'autre part :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, |f_x(t)| \leq \varphi(t)$$

D'après l'extension du théorème de convergence dominée :

$$\int_I f_x \underset{x \to a}{\to} \int_I f_a$$

1.1.4 Remarque : restreindre A, restreindre I

Restreindre A revient à étudier une restriction de g, ce qui est très fréquent ; restreindre I revient à changer d'exercice, ce qui n'est pas recommandé...

1.2 Exercices : la transformée de Laplace

1.2.1 Définition

Soit f continue par morceaux intégrable sur $I =]0, +\infty[$; posons

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1.2.2 Continuité

F est continue sur $A = [0, +\infty[$.

Démonstration

Le théorème s'applique sans difficulté ; $\varphi(t) = |f(t)|$ convient.

1.2.3 Le théorème de la valeur initiale

Soit f continue par morceaux bornée sur $I =]0, +\infty[$.

On suppose que f a une limite finie L en 0^+ ; alors :

$$\lim_{x \to +\infty} xF(x) = L$$

Démonstration

On utilise l'extension du théorème de convergence dominée :

$$\forall x>0,\, x.F(x)=x.\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-u}f\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u$$

Une domination :

$$\forall x\in A=\left]0,+\infty\right[,\forall t\in I,\left|e^{-u}f\left(\frac{u}{x}\right)\right|\leq M.e^{-u}$$

F est-elle continue ?

On montre que F est continue sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a>0$; on en déduit que F est continue sur $A=]0,+\infty[$. Une domination :

$$\forall x\geq a,\forall t>0,\left|e^{-xt}.f(t)\right|\leq M.e^{-at}$$

où $M=\sup\limits_I|f|$.

1.2.4 Le théorème de la valeur finale

Soit f continue par morceaux bornée sur $I=]0,+\infty[$; on suppose que f a une limite finie l en $+\infty$; alors : $\lim\limits_{x\to0^+}xF(x)=l$.

2 Dérivation d'une intégrale à paramètre

2.1 Théorème

2.1.1 Enoncé

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J\times I$ à valeurs dans K. On suppose que

- Pour tout $t\in I$, $f(.,t)$ est de classe C^1 sur J.
- Pour tout $x\in J$, $f(x,.)$ est continue par morceaux intégrable sur I.
- Pour tout $x\in J$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ est continue par morceaux sur I et dominée : il existe une fonction φ intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall x\in J,\forall t\in I,\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\varphi(t)$$

Alors

$$g:x\to\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur J et vérifie

$$g'(x)=\int_I\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

2.1.2 Démonstration

On utilise l'extension du théorème de convergence dominée ; fixons $a\in J$:

$$\forall x\in J-\{a\},\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\int_I\frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}\mathrm{d}t$$

2.1.3 Extension

Cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de J.

2.2 Généralisation : classe C^k

Théorème

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans K. On suppose que

- Pour tout $t \in I$, $f(.,t)$ est de classe C^k sur J.
- Pour $0 \leq j \leq k-1$, pour tout $x \in J$, $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,.)$ est continue par morceaux intégrable sur I.
- Pour tout $x \in J$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$ est continue par morceaux sur I et dominée : il existe une fonction φ intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall x \in J, \forall t \in I, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

Alors

$$g : x \to \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^k sur J et vérifie

$$\forall x \in J,\ g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque

Une domination sur tout segment contenu dans J suffit.

Remarque

Pour $k=0$ et $k=1$, on retrouve les deux théorèmes précédents.

Justification

Se démontre par récurrence sur k, en vérifiant que $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,.)$ est également dominée.

3 Complément : la fonction Γ

3.1 Définition

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1}\mathrm{d}t$$

Existence ?

On note $I =]0,+\infty[$; Γ est définie sur $D =]0,+\infty[$.

3.2 $\Gamma(x+1)$, Γ aux points entiers

Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[= D, \Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$ et $\forall n \geq 1, \Gamma(n) = (n-1)!$

3.3 Continuité

Montrons que Γ est continue sur D :

- $x \to e^{-t}.t^{x-1}$ est continue sur D pour tout $t \in I$.
- $t \to e^{-t}.t^{x-1}$ est continue par morceaux sur I pour tout $x \in D$.

Domination

On cherche φ intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in D, \forall t \in I, \left|e^{-t}.t^{x-1}\right| \leq \varphi(t)$$

Pour $t > 1$, une telle majoration n'existe pas ; en effet :

$$\lim_{x \to +\infty} t^{x-1} = +\infty$$

Pour $t \in]0,1[$, il existe une majoration :

$$\forall x \in D, \forall t \in]0,1[\,, \left|e^{-t}.t^{x-1}\right| \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \varphi(t) = \frac{1}{t}$$

Mais cette fonction φ n'est pas intégrable au voisinage de 0.

Domination sur segments

On se contente de dominer sur tout segment de D (pas de I) :
Si $0 < a < b$, alors :

$$\forall x \in [a,b]\,, \forall t > 0,\ \left|e^{-t}.t^{x-1}\right| \leq e^{-t}.\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \varphi(t)$$

On peut remarquer que :
- si $t > 1$, $\varphi(t) = e^{-t}.t^{b-1}$
- si $0 < t < 1$, $\varphi(t) = e^{-t}.t^{a-1}$

Cette fonction φ est bien continue par morceaux intégrable sur I.

3.4 Dérivation

Montrons que Γ est de classe C^∞ et :

$$\forall x > 0, \forall n \geq 0, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1}.(\ln t)^n\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Si $0 < a < b$, et $a \leq x \leq b$, alors

$$\forall t > 0,\ e^{-t}.t^{x-1}.\left|\ln t\right|^n \leq e^{-t}.\left|\ln t\right|^n.\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \varphi(t)$$

Intégrabilité de φ :

φ est continue sur $]0,+\infty[$.
- en 0 :
$\varphi(t) = e^{-t}.\left|\ln t\right|^n.t^{a-1} \sim \left|\ln t\right|^n.t^{a-1}$;$\left|\ln t\right|^n.t^{a-1} = \left|\ln t\right|^n.t^{\frac{a}{2}}.t^{\frac{a}{2}-1} = o\left(t^{\frac{a}{2}-1}\right)$.
- en $+\infty$:
$\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2.\varphi(t) = 0$ par croissances comparées.

3.5 Etude en 0

Exercice

$\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0.

Démonstration

Au voisinage de 0 :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{\Gamma(1)}{x}$$

car Γ est continue en 1, et $\Gamma(1) \neq 0$.

4 Exercices : la transformée de Fourier

4.1 Définition, continuité

Soit f continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes ; on pose

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-itx}\mathrm{d}t$$

Montrer que $\hat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$.

4.2 Limite : le lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f continue par morceaux intégrable sur un intervalle I à valeurs complexes ; on pose

$$g(x) = \int_I f(t)\, e^{itx} \mathrm{d}t$$

Montrer que

$$\lim_{+\infty} g = 0$$

4.2.1 Dans le cas où f est en escalier sur un segment

4.2.2 Dans le cas où f est de classe C^1 sur un segment $I = [a, b]$

Intégration par parties :

$$\forall x > 0, g(x) = \left[-\frac{i}{x} f(t) . e^{itx}\right]_a^b + \frac{i}{x} \int_a^b f'(t)\, e^{itx} \mathrm{d}t$$

D'où

$$\forall x > 0, |g(x)| \leq \frac{1}{x} \left(|f(a)| + |f(b)|\right) + \frac{1}{x} \int_a^b |f'|$$

Dans ce cas, $g(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

4.2.3 Dans le cas où f est continue par morceaux sur un segment $I = [a, b]$

On se ramène par approximation au cas des fonctions en escalier.

4.2.4 Dans le cas général

Idée :

on fixe $\varepsilon > 0$; on fixe un segment $J \subset I$ tel que

$$\int_{I \setminus J} |f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

4.2.5 Pourtant...

La suite suivante ne tend pas vers 0 :

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{t} \mathrm{d}t$$

4.3 Exemple

$f(t) = \exp\left(-t^2\right)$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-itx} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} . \cos(tx)\, \mathrm{d}t$$

Montrer que $\hat{f} = g$ vérifie une équation différentielle linéaire.

Réponse

$$y' + \frac{x}{2} y = 0$$

Calculer $\hat{f}$

Réponse

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{f}(x) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

Remarque

On peut aussi calculer $\hat{f}$ avec un développement en série de $\cos tx$ (long).

5 Exercices : des transformées de Laplace

5.1 Exemple 1

Trouver le domaine de définition D de $f : x \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

5.1.1 Continuité

Montrer que f est continue sur D.

Démonstration

Soit

$$h(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

Pour tout $t > 0$, h est continue par rapport à x sur $\mathbb{R}+$; pour tout $x \geq 0$, h est continue par morceaux par rapport à t sur $]0,+\infty[$.

Enfin :

$$\forall x \geq 0, \forall t > 0, |h(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \alpha(t)$$

avec α continue par morceaux intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}+$.

5.1.2 Equation différentielle

Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire sur $\overset{\circ}{D}$.

Réponse

Pour tout $t > 0$, $h(.,t)$ admet une dérivée seçonde continue par rapport à x sur $\mathbb{R}+$ et continue par morceaux par rapport à t sur $]0,+\infty[$. Fixons $a > 0$; soit $J = [a,+\infty[$.

$$\forall x \geq a, \forall t > 0, \left|\partial_1^2 f(x,t)\right| = \left|\frac{t^2}{1+t^2}.e^{-xt}\right| \leq e^{-at} = \beta(t)$$

avec β continue par morceaux intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc f est de classe C^2 sur J ; a étant quelconque dans $]0,+\infty[$, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. De plus :

$$\forall x > 0, f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}.e^{-xt} \mathrm{d}t$$

On en déduit aisément que :

$$\forall x > 0, f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}$$

5.1.3 En $+\infty$

Montrer que $f(x) \sim \frac{1}{x}$.

Réponse

$xt = u$, et théorème de convergence dominée.

5.2 Exemple 2

Trouver le domaine de définition D de $f : x \to \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

5.2.1 Continuité

Montrer que f est continue sur $\overset{\circ}{D}$.

5.2.2 Dérivation

Montrer que $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ sur $\overset{\circ}{D}$.

5.2.3 Calcul

Calculer f sur $\overset{\circ}{D}$

Réponse

$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

5.2.4 En 0

Montrer que f est continue sur D.

Réponse

Utiliser le TSA. Que conclure ?

5.3 Complément : continuité de la transformée de Laplace sur $\mathbb{R}+$

On suppose que $g \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et que $\int_0^{+\infty} g$ existe ; soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t)\,\mathrm{d}t$; on veut montrer que f est continue sur $D = \mathbb{R}^+$.

5.3.1 Cas particulier plus facile

Le cas particulier où g est intégrable.

Dans ce cas, le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre s'applique directement ; la domination est assurée par ?

Réponse

$\varphi(t) = |g(t)|$.

5.3.2 Retour au cas général : existence de f

Montrer que f est définie sur D.

Réponse

Intégration par parties.

5.3.3 Continuité de f

Soit G la primitive de g nulle en 0 ; on a :

$$\forall x > 0, f(x) = \int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} \mathrm{d}u$$

On montre la continuité de f au point 0 avec le théorème de convergence dominée, et sur $]0, +\infty[$ avec le théorème de continuité.

6 Complément : la factorisation des fonctions de classe C^k

6.1 Exercice

Soit $k \geq 1$; soit $f \in C^k(I, K)$ telle que $f(a) = 0$; montrer l'existence de g de classe C^{k-1} sur I telle que

$$\forall x \in I, f(x) = (x-a)\, g(x)$$

Réponse

Supposons $a = 0$.

$$\forall x \in I,\ f(x) - f(0) = \int_0^x f' = x.\int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u$$

6.2 Généralisation

Soit $k \geq 1$; soit $f \in C^k(I, K)$ telle que $f^{(j)}(a) = 0$ pour $0 \leq j \leq m-1$; montrer l'existence de g de classe C^{k-m} sur I telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) = (x-a)^m g(x)$$

Réponse

Supposons $a = 0$.

$$\forall x \in I,\ f(x) = x^m.\int_0^1 \frac{(1-u)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(ux)\,\mathrm{d}u$$