Réels, rationnels, suites

1 Partie entière : rappeler la définition ; montrer que : $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $\forall\, y\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $E(x+1) = E(x)+1$, $E(x)+E(y) \le E(x+y)$, $E(x) = E(\dfrac{E(nx)}{n})$. Soit $x > 0$; montrer que $E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{E(x)})$.

2 Soient A et B parties de $\mathbb{R}$ non vides bornées ; montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \le \sup B$; étudier $\sup(A\cup B)$, $\sup(A+B)$. Montrer que $\sup(f+g) \le \sup f + \sup g$, $|\sup f - \sup g| \le \sup|f-g|$, $|\inf f - \inf g| \le \sup|f-g|$; si f est à valeurs > 0 et majorée, montrer que $\dfrac{1}{\sup f} = \inf \dfrac{1}{f}$.

3 On suppose que pour tout entier k fixé, $(u_{n+k} - u_n)$ tend vers 0. Est-ce-que (u_n) CV ?

4 On suppose que : $\forall\, n, p \in\mathbb{N}^*$, $0 \le u_n \le \dfrac{1}{p} + \dfrac{p}{n}$. Montrer que (u_n) converge vers 0.

5 Trouver $\lim\limits_{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{1/n}$. Soit $a, b > 0$. Trouver $\lim\limits_{n} [\frac{1}{2}(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})]^n$.

6 Etudier la suite de terme général $u_n = (2+\sqrt{3})^n - E((2+\sqrt{3})^n)$. On pourra utiliser $v_n = (2-\sqrt{3})^n$.

7 Que dire de (u_n) et (v_n), deux suites de réels telles que $(u_n{}^2 + u_n v_n + v_n{}^2)$ converge vers 0 ?

8 Montrer que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, (u_n) CV. On suppose que (u_{2n}), (u_{2n+1}), et $(u_{f(n)})$ CV. Montrer que (u_n) CV dans le cas où $f(n) = 3n$, puis $f(n) = E(\sqrt{2}n)$.

9 Soit (u_n) une suite croissante et majorée de réels. Montrer que (u_n) converge. Soit maintenant (u_n) une suite de réels majorée, telle que : $\exists\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in\mathbb{N}$, $\forall\, p \ge k$, $u_{n+p} \ge u_n$. Montrer que (u_n) converge.

10 Montrer que toute suite de réels est la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante.

11 Montrer que l'ensemble des rationnels de la forme $r = \dfrac{2p+1}{2q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

12 Soit $f : E\times F \to \mathbb{R}$ bornée. Montrer que $\sup\limits_{y\in F}\inf\limits_{x\in E} f(x,y) \le \inf\limits_{x\in E}\sup\limits_{y\in F} f(x,y)$.

13 Soit (u_n) une suite de réels positifs tendant vers 0 ; montrer que $\{\, n \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, k \ge n,\ u_k \le u_n \,\}$ est infini.

14 On suppose : $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, N$ ($\forall\, n \ge N$ $|u_n - L| \le \varepsilon$ ou $\forall\, n \ge N$ $|u_n - L'| \le \varepsilon$). Montrer que (u_n) CV.

15 Soit a et b deux réels, $u_n = \left[\dfrac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)}\right]^{n\ln n}$. Trouver la limite l de u_n, puis un équivalent de $u_n - l$. Peut-on retrouver ce résultat avec Python ?

16 Montrer que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont irrationnels. Soit $E = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$. Montrer que E est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et que $((\sqrt{2}-1)^n)$ est une suite d'éléments de E non nuls convergeant vers 0.

En déduire que E est dense dans $\mathbb{R}$.

17 Soit A partie non majorée de $\mathbb{R}$; montrer que $\bigcup_{n\geq 1} \frac{1}{n} A$ est dense dans $\mathbb{R}+$.

18 Soit $S_x = \sup\{|\sin nx| \,/\, n\in\mathbb{N}\}$. Calculer S_x pour quelques valeurs de x. Trouver $\inf_{0<x<\pi} S_x$.

19 Existe-t-il un triangle équilatéral dans $\mathbb{R}^2$ dont les trois sommets sont à coordonnées rationnelles ?

20 Soit (u_n) une suite de limite L, $v_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$; montrer que (v_n) CV vers L.
(Se ramener au cas où $L = 0$; fixer $\varepsilon > 0$, découper la somme en 2,…).

21 Soit $n > 1$, $x_1,\ldots,x_n$ n réels dans $I = [a,b]$, et $L = b-a$. Montrer que : $\exists\ i \neq j,\ \left|x_i - x_j\right| \leq \frac{L}{n-1}$.
(On pourra ordonner les x_i). Que vaut $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$?
Montrer que parmi 13 réels distincts, il y en a 2, x et y, tels que $0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}$.

22 Soit X une partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments, telle que : $\forall\ x, y \in X$, $\frac{x+y}{2} \in X$.
Montrer que X est dense dans $]\inf X, \sup X[$.

23 Soit X une partie de $]0,+\infty[$ contenant au moins deux éléments, telle que : $\forall\ x, y \in X$, $\sqrt{xy} \in X$.
Montrer que les éléments irrationnels de X constituent une partie dense dans $]\inf X, \sup X[$.

24 Soit $A =]-\infty,5[$; on pose $x \oplus y = -xy + 5(x+y) - 20$ et $x \otimes y = 5-(5-x)^{\ln(5-y)}$; montrer que $(A,\oplus,\otimes)$ est un corps.

25 On donne $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$, $b_1 > b_2 > \ldots > b_n > 0$. Soit $f \in S_n - \{Id\}$ une permutation.
Montrer que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{f(i)} < \sum_{i=1} a_i b_i$.

26 Soit (u_n) une suite de réels telle que $\lim_n u_{n+1} - u_n - u_n^2 = 0$; on veut montrer que $\lim_n u_n = 0$ ou $\lim_n u_n = +\infty$. On fixe $\varepsilon > 0$; montrer que $\{n \geq 0 / u_n \geq -\varepsilon\}$ est infini ; montrer que $\{n \geq 0 / u_n \leq -\varepsilon\}$ est fini ; on suppose de plus que $\{n \geq 0 / u_n \geq \varepsilon\}$ est infini ; montrer que $\{n \geq 0 / u_n \leq \varepsilon\}$ est fini ; conclure.

27 Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite finie à gauche et à droite en tout point.
On note $\delta(a) = \text{diam}\ \{\ f(a), f(a^+), f(a^-)\}$.
Si $\delta(a) > 0$, montrer l'existence de deux rationnels r_1 et r_2 tels que $r_1 < a < r_2$ vérifiant :
$\forall\ x \in]r_1, r_2[\setminus \{\ a\ \},\ \delta(x) < \delta(a)$.
En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

28 Si une suite de rationnels converge vers un irrationnel, montrer que la suite des dénominateurs tend vers l'infini.