Normes

1 Montrer dans un EVN, l'adhérence de tout sous-espace est un sous-espace.
Même question avec partie convexe.

2 Dans $\mathbb{R}^2$, soit $N(X) = \max\{|x|,|y|,|x-y|\}$; montrer que c'est une norme, et décrire $B(0,1)$.
Mêmes questions avec $N(X) = \sqrt{x^2+2.y^2}$.

3 La norme canonique sur $\mathbb{R}^n$: $\| \|_\infty$ est-elle euclidienne, c'est-à-dire associée à un produit scalaire ?

4 Soit E un EVN. CNS pour que $\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(a',r')$?

5 Soit A et B deux parties d'un EVN E ; montrer à l'aide de suites que $\overline{A}+\overline{B} \subset \overline{A+B}$, mais qu'il n'y a pas toujours égalité.

6 Montrer que $d(x,\overline{A}) = d(x,A)$, $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$, $d(x,A) = 0$ SSI $x \in \overline{A}$.

7 Soit A et B deux parties non vides de E EVN. CNS pour que $d_A = d_B$?

8 Soit (A_n) une suite croissante de parties non vides d'un EVN E d'union A ; montrer que :
$\forall\, x \in E,\ \lim_n d(x,A_n) = d(x,A)$.

9 Soit E un EVN, A un ouvert de E, B une partie de E. Montrer que $A+B$ est ouvert dans E. (Examiner par exemple le cas où B est un singleton). Si de plus A et B sont denses dans E, montrer que $A\cap B$ est dense dans E. Contre-exemple si A n'est pas ouvert ?

10 Soit F et G fermés disjoints de E EVN. Montrer l'existence de U et V ouverts disjoints tels que $F \subset U$ et $G \subset V$. Montrer l'existence de f $C°$ de E dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x \in F,\ f(x) = 0$ et $\forall\, x \in G,\ f(x)=1$, puis que tout fermé de E est l'intersection d'une suite d'ouverts. (Utiliser d_F, d_G, d_F - d_G, $\dfrac{d_F}{d_F+d_G}$ …).

11 Soit A et B parties denses de E EVN, telles que $A\cap B = \varnothing$; montrer que $\overset{o}{A} = \overset{o}{B} = \varnothing$.

12 Soit $I = [0, 1]$, $E = C^1(I, \mathbb{R})$. On pose $\|f\| = [f(0)^2 + \int_0^1 f'^2]^{1/2}$. Montrer qu'il s'agit d'une norme et calculer inf et sup de $\| \| / \| \|_\infty$.

13 Soit E un EVN, a et b des éléments de E, (a non nul) et $f(t) = \|ta+b\|$.

a Montrer que si E est un EV préhilbertien, f admet un unique minimum.

b Dans le cas général, montrer que f est $C°$ sur $\mathbb{R}$, trouver ses limites, et montrer que f admet un min.

c Etudier le cas où $E = C°([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \|_\infty$, $a(x) = 1-x$, $b(x) = x$.

d Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

14 Soit $I = [0, 1]$ et $E = C°(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ muni de $\| \|_\infty$. On définit T par $T(f) = \sin \circ f$. Montrer que T est continue de E dans E. Même question en remplaçant sin par une fonction φ uniformément continue sur $\mathbb{R}$, puis par une fonction φ seulement continue sur $\mathbb{R}$.

15 Soit $a \in E$, $b \in X$ tel que $d(a, X) = \|a - b\|$. Soit $a' \in \left]a, b\right[$. Montrer que $d(a', X) = \|a' - b\|$.

16 Un exemple de distance non atteinte. Soit $I = [0, 1]$, $E = C^{\circ}(I, \mathbb{R})$; soit $\|f\| = \|f\|_{\infty} + \|f\|_{1}$; montrer qu'il s'agit d'une norme sur E, et la comparer à $\| \|_{\infty}$.
Soit $F = \{ f \in E / f(0) = 0 \}$; pour $\|f\|$: montrer que F est fermé dans E ; on note 1_E la constante 1 ; trouver $d(1_E, F)$ et montrer qu'elle n'est pas atteinte.

17 Soit $E = \mathbb{R}^n$, U l'ensemble des n-uplets de réels distincts. Montrer que U est un ouvert dense dans E.

18 Dans l^{∞} (EV des suites bornées muni de la norme infinie), trouver l'adhérence de l'ensemble des suites à support fini. (nulles à partir d'un certain rang).

19 On dit qu'une norme N est stricte si $N(x + y) < N(x) + N(y)$, sauf lorsque x et y sont positivement colinéaires (c'est-à-dire $x = 0$, ou $\exists t \geq 0, y = tx$).
a Donner un exemple de norme stricte, un exemple de norme non stricte.
b Montrer que si N est stricte, la sphère unité ne contient pas de segment d'extrémités distinctes.

20 Soit E un $\mathbb{R}$-EV préhilbertien ; rappeler l'identité du parallélogramme. Réciproquement, soit E un $\mathbb{R}$-EVN dont la norme vérifie l'identité du parallélogramme ; montrer que E est un EV préhilbertien.