Fonctions continues

1 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ si x est rationnel, $f(x) = 0$ sinon ; f est-elle continue, dérivable ?

2 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x, y\in\mathbb{R}$ $\left|f(x) - f(y)\right| \le \left|x-y\right|^2$. Montrer que f est constante. (On pourra étudier f'). Même question avec $g : \mathbb{Q}\to\mathbb{R}$.

3 Soit f croissante sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f est constante.

4 Soit f croissante sur $\mathbb{R}$ et surjective. Montrer que f est continue.

5 Etudier les suites vérifiant : $\forall\, n \ge 0,\ u_{n+1} = 1+3u_n$. Chercher les $f \in C^\circ(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(3x+1)$.

6 Chercher les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$. (Montrer que f est nécessairement de classe C^1).

7 Soit $I = [0, 1]$ et $f \in C^\circ(I, I)$ telle que $f \circ f \circ f = Id$. Montrer que f est bijective, monotone, croissante, puis que $f = Id$.

8 Chercher les morphismes de groupes continus de : **a** $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. **b** $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.
c $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. **d** **U**, puis $\mathbb{C}^*$ dans $]0, +\infty[$. **e** $GL_n(\mathbb{C})$ dans $]0, +\infty[$.

9 Montrer que : **a** $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \max(x, y) = x + \max(0, y-x)$. **b** $f : z \to \max(0, z)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
c si f et g sont C° à valeurs réelles, $\max(f, g)$ est C°. Cas de plusieurs fonctions ? D'une infinité ?

10 Soit $f \in C^\circ(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$ (coercive). Montrer que f possède un minimum.

11 Soit $I = [0,1]$. Soit f une fonction continue de I dans I telle que $f \circ f = Id$. Montrer que f est bijective, en déduire qu'elle est monotone. Si f est croissante, montrer que $f = Id$.
Si f est décroissante, montrer que f a un point fixe unique, et que $f(0) = 1$. Décrire f.

12 Soit I un intervalle, $f \in C^\circ(I, \mathbb{R})$, $x_1,\dots x_n \in I$. Montrer que : $\exists\, x \in I,\ nf(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$.

13 Soit $f : I = [0, 1]\to\mathbb{R}$ C° telle que $f(0) = f(1)$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$.
Montrer que : $\exists\, x \in I,\ f(x) = f(x+\frac{1}{p})$.

14a Chercher les fonctions g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\, x, y \in\mathbb{R},\ g(x+y)+g(x-y) = 2[g(x)+g(y)]$. On pourra montrer que $g(0) = 0$, g est paire, $g(nx) = n^2 g(x)$...
b Chercher les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$.
Remarquer que si $f(x) = 0$, alors $f(\frac{x}{2}) = 0$.
c Autre méthode pour **a** : soit G une primitive de g ; en fixant y et en intégrant par rapport à x sur $[0,1]$, établir une relation entre g et G ; en déduire que g est de classe C^∞ ; dériver et conclure.

15 Chercher les fonctions f $C°$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\, x, y \quad (1+f(x)f(y))f(x+y) = f(x)+f(y)$.
On pourra étudier $f(0)$, montrer que $|f| \leq 1$, trouver des solutions "évidentes", et remarquer que si $f(x) = 1$, alors $f(\frac{x}{2}) = 1$.

16 Soit f un endomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ monotone. Montrer que f possède une limite finie L en 0^+, puis que $L = 0$. Montrer que f est $C°$, conclure.