Séries à termes positifs

1 Etudier la nature des séries de terme général :
$\frac{n}{2^n}$, $\frac{2^n}{n!}$, $\frac{\sqrt{n!}}{2^n}$, $\frac{2^n n!}{(2n)!}$, $\frac{n\ln(n)2^n}{3^n}$, 2^{-n} si n est pair et $n^2 3^{-n}$ si n est impair,
$\frac{1}{n}$ si n est pair et $\frac{1}{n^2}$ si n est impair, $\ln(\cos\frac{1}{n})$, $\ln(\cos\frac{1}{n}).\ln(\sin\frac{1}{n})$, $\exp(-(\ln n)^a)$,
$\frac{a^n+(\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n+(\sqrt{n})^{\ln n}}$ ($a>0$, $b>0$).

2 Nature de $\sum \frac{0!+1!+...+n!}{(n+p)!}$, où p est un entier naturel fixé.

3 CV et calcul de la somme : **a** $\sum \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$ **b** $\sum \arctan\frac{1}{1+n+n^2}$. Vérifier avec Python.

4 Soit $v_n=\sum_{k=2}^{n}\ln^2 k$, $u_n=\frac{v_n}{n^\alpha}$. Chercher un équivalent de v_n. Nature de $\sum u_n$?

5 Déterminer un équivalent de $\arccos$ en 1. Nature de $\sum\arccos(1-\frac{1}{n^2})$? de $\sum\arccos(\frac{2}{\pi}\arctan n^2)$?

6 Nature de $\sum(\frac{n}{n+1})^{n^2}$, $\sum\frac{\ln n}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$, $\sum(1+\frac{1}{\ln n})^{-n}$?

7 Soit $R\in\mathbb{R}(X)$. Nature de $\sum R(n)$?

8 CV et calcul de $\sum\frac{1}{n}[E(\sqrt{n+1})-E(\sqrt{n})]$?

9 Soit $\beta>0$; nature de $\sum\exp(-n^\beta)$? Soit $\alpha>0$; nature de $\sum(\cos\frac{1}{n^\alpha})^n$?

10 Trouver les $a>0$ tels que $\sum\frac{\ln^2 n}{n^a}$ converge ; dans ce cas, soit $u_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\ln^2 k}{k^a}$; nature de $\sum u_n$?

11 Soit $\sum u_n$ une série CV de réels strictement positifs.

a Montrer que $\lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2u_k=0$. (fixer $\varepsilon>0$, découper en 2).

b Montrer que pour des réels $a_j>0$, $n^2\le(\sum_{j=1}^{n}a_j)(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j})$.

c Montrer que $\sum\frac{1}{n^2u_n}$ diverge.