Séries

1 On définit (u_n) par $u_0 > 0$, et $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1+u_n{}^2}$. Trouver $L = \lim\limits_n u_n$. Nature de $\sum u_n - L$?

2 Montrer que si $\sum u_n$ est ACV, alors $\sum u_n{}^2$ converge ; si $\sum u_n$ est seulement convergente ?

3 Nature de $\sum (-1)^n \sqrt{n} \sin\dfrac{1}{n}$? $\sum \ln\cos\dfrac{1}{n}.\ln\sin\dfrac{1}{n}$? $\sum (-1)^n [e - (1+\dfrac{1}{n})^n]$?

4 Nature de $\sum \sin \pi(2-\sqrt{3})^n$, de $\sum \sin \pi(2+\sqrt{3})^n$?

5 Soit $u_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$; montrer que $\dfrac{1}{k!} \sim \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$; en déduire un équivalent, puis un DA de u_n.
Soit $a_n = \sin(2\pi e n!)$ et $b_n = \sin(\pi e n!)$. Nature de $\sum a_n$, de $\sum b_n$?

6 Soit $u_n = \prod\limits_{k=2}^{n} (2 - e^{1/k})$; étudier (u_n) ; nature de $\sum (-1)^n u_n$, de $\sum u_n$? On peut étudier $(n.u_n)$.

7 Soit (a_n) une suite de réels telle que $\sum a_n{}^2$ CV. Montrer que $\sum \dfrac{a_n}{n}$ CV.

8 CV et calcul de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)}$; calculer $\lim\limits_n (\dfrac{4}{3} s_n)^n$, où (s_n) est la suite des sommes partielles.

9 Soit r_n le reste de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$; nature de $\sum r_n$?

10 Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$; équivalent de (u_n) ? Nature de $\sum u_n$, somme éventuelle ?

11 Justifier l'existence de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(n+k)}$; étudier la nature des séries $\sum u_n$, $\sum \dfrac{u_n}{n}$, $\sum (-1)^n u_n$.

12 Montrer que $\cos(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ est irrationnel.

13 Soit $I = [0, 1]$, $\sum a_n$ une série convergente à termes strictement positifs, $E = C^\circ(I, \mathbb{R})$, et $(t_n) \in I^{\mathbb{N}}$.
Pour f élément de E, justifier l'existence de $N(f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n |f(t_n)|$; CNS pour que N soit une norme ?
N est-elle équivalente à $\| \ \|_\infty$?

14 Montrer que $\sum (-1)^n \ln(1+\dfrac{1}{n})$ CV. Calculer sa somme à l'aide de la formule de Stirling.
On trouve $\ln\dfrac{2}{\pi}$.