

Suites de fonctions

1 Etudier la CV sur $]0, +\infty[$ de $f_n(t) = \frac{\sin nt}{n\sqrt{t}}$.

2 Etudier la CVS, puis uniforme sur \mathbb{R} de $f_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$.

3 Etudier la CV sur \mathbb{R} de $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$.

4 (f_n) CVU sur X . Soit $g_n = \frac{f_n}{1 + f_n^2}$. Montrer que (g_n) CVU sur X .

5 Expliciter une suite de polynômes CVU vers \cos sur $[0,1]$. Sur \mathbb{R} ?

6 Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$, et $f_n(x) = f\left(x + \frac{x(1-x)}{n}\right)$; étudier CVS et CVU ; même question si f n'est que C^0 .

7 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Etudier la CV sur \mathbb{R} de $f_n(x) = \sqrt{f^2(x) + \frac{1}{n}}$.

8 On suppose que (f_n) CVU sur X vers f et que les f_n sont uniformément continues sur X ; montrer que f est uniformément continue sur X .

9 Etudier la CV sur $]0, +\infty[$ de $f_n(x) = \frac{n+x}{1+nx}$, sur $[0,1]$ de $u_n(x) = \int_0^x \exp(t^n) dt$.

10 Etudier la CV sur \mathbb{R} de $f_n(x) = n[\arctan(x + \frac{1}{n}) - \arctan(x - \frac{1}{n})]$.

11 Soit $I = [a, b]$, $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer l'existence d'une suite (P_n) CVU vers f sur I telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(a) = P_n(b) = 0$. Généraliser au cas de q points dans I .

12 Vers le théorème de Weierstrass. Soit $I = [-1, 1]$, $P_0 = 0$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X^2 - P_n^2)$.

Montrer que $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$, $|x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n$, enfin que $P_n(x)$ CVU vers $|x|$ sur I .

13 Soit $E = (C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Trouver l'adhérence de l'ensemble des fonctions polynomiales paires, puis impaires.

14 Soit $E = C^1([a, b], \mathbb{R})$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$; vérifier qu'il s'agit d'une norme et que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans E pour cette norme.

15 Vers le théorème d'Ascoli. Soit $k > 0$, et (f_n) suite de fonctions k -lip sur $I = [a, b]$ à valeurs dans F , CVS vers f sur I . Montrer que la CV est uniforme sur I . Contre-exemple avec des fonctions k_n -lip ? Généraliser en remplaçant I par un compact quelconque.