Séries de fonctions

1 Etudier $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+nx}$. Calculer $f(n)$ si n est entier.

2 Etudier $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{sh(nx)}$, $g(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(x+p)^2}$.

3 Soit $I =]0, 1]$. Nature de la CV sur I de $\sum x^n \ln x$, $\sum (-x)^n \ln x$?

4 Montrer qu'il existe une unique fonction f définie pour $x > 0$, de limite nulle en $+\infty$, et telle que : $\forall\, x > 0,\ f(x)+f(x+1) = \frac{1}{x^2}$; montrer que f est continue, intégrable sur $[1,+\infty[$, et calculer $\int_1^{+\infty} f$.

5 Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on pose $f(x) = \lim_n \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{x+j}$. Montrer que f est définie, impaire et 1-périodique. Montrer que si $2x \notin \mathbb{Z}$, $2f(2x) = f(x) + f(x+\frac{1}{2})$. Pour $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ on pose $g(x) = f(x) - \pi \cot \pi x$. Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée, $g(0) = 0$, puis $g = 0$. Conclusion ?

6 Soit $f(x,t) = e^{-xt}\frac{\sin t}{t}$, $u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x,t)dt$; montrer que $\sum u_n$ CVU sur $[0,+\infty[$; montrer que sa somme S est C^1 sur $]0, +\infty[$ et la calculer ; conclusion ?

7 Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t dt}{t}$. Montrer que (f_n) CVU sur $]0,1[$, et $\gamma = \int_0^1 \frac{(1-e^{-u})du}{u} - \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}du}{u}$.

8 Soit (a_n) une suite de réels. Construire f croissante sur $\mathbb{R}$, continue sauf aux points a_n.

9 Montrer la CVU sur $\mathbb{R}$ de $\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+x^2}$

10 Soit $I = [0,1]$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\sum (-1)^n t^n f(t)$ CVU sur I SSI $f(1) = 0$.

11 Soit $I =]0, +\infty[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!}$; montrer que f est définie, C°, décroissante et convexe sur I ; $S(1)$? Montrer que $xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1)$; limites, équivalents de S en 0^+ et en $+\infty$?

12 Soit (a_n) une suite positive décroissante et $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$. Montrer que $\sum u_n$ CVS sur $I = [0, 1]$. Montrer que la série CVN SSI $\sum \frac{a_k}{k}$ CV, et CVU SSI $\lim_n a_n = 0$.

13 On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n x)$; montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$; montrer que f est continue ; montrer que f n'est pas dérivable en 0 (on pourra utiliser $x_q = \frac{\pi}{2^q}$).

14 Soit (b_n) décroissante positive, $u_n(x) = b_n \sin nx$. Montrer que $\sum u_n$ CVU sur $\mathbb{R}$ SSI $\lim_n nb_n = 0$.

15 Soit g 2–périodique définie sur $[-1,1]$ par $g(x) = |x|$; soit $f(x) = \sum_0^{\infty} (\frac{3}{4})^n g(4^n x)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est dérivable en aucun point. ($h = \pm 0.5\ 4^{-m}$).