**Familles sommables**

**1** Soit $(u_n)$ décroissante de limite 0 et $v_n = n(u_{n-1} - u_n)$.
En écrivant $u_n$ comme somme d'une série, et à l'aide d'une série double, montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et ont même somme dans le cas où elles convergent.
Illustrer à l'aide d'un histogramme.

**2** Soit $s(n)$ le nombre de chiffres de $n$ en base 2. CV et calcul de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)}$. (Transformation d'Abel ou sommation par paquets).

**3** Montrer que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\varsigma(n) - 1) = 1$.

**4** Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}^-$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)...(x+n)} = e \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!}$ à l'aide d'un produit de Cauchy.

**5** Soit $\sum a_n$ une série de réels positifs de somme $S$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k \sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$.

**6** Montrer que si $t$ est un complexe tel que $|t| < 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} t^p}{1-t^p}$.

**7** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n+1 \leq e(n!)^{1/n}$. Soit $\sum u_n$ une série CV de réels positifs, et $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$.
Montrer que $\sum \frac{w_n}{n(n+1)}$ CV.
Soit $v_n = (u_1 . u_2 ... u_n)^{1/n}$. Montrer que $\sum v_n$ CV et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n \leq e \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (inégalité de Carleman).
Montrer que la constante $e$ est optimale.