Séries et intégrales

1 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}} \mathrm{d}x$

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$$

Indications

Soit

$$f : x \to \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}}$$

f se prolonge par continuité sur $[0,+\infty[$ en posant $f(0) = \frac{1}{3}$.

En $+\infty$: $f(x) \sim x.e^{-2x}$, donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, d'où l'intégrabilité de f. Ensuite :

$$\forall x \in]0,+\infty[, f(x) = \frac{x.e^{-2x}}{1-e^{-3x}} = x.e^{-2x}.\sum_{k=0}^{\infty} e^{-3kx}$$

Soit $I_k = \int_0^{+\infty} \left|x.e^{-(2+3k)x}\right| \mathrm{d}x$.

$$\forall k \geq 0,\ I_k = \int_0^{+\infty} x.e^{-(2+3k)x} \mathrm{d}x = \frac{1}{(2+3k)^2} \int_0^{+\infty} u.e^{-u} \mathrm{d}u = \frac{1}{(2+3k)^2}$$

$\sum u_k$ converge, donc le théorème d'intégration terme à terme s'applique, ce qui permet de conclure.

2 Prolongement de ζ

Notations :

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on note

$$\Phi(s) = \zeta(s) - \frac{s}{s-1}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

1- Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $n \geq 1$. Exprimer

$$\int_{n-1}^{n} f - f(n)$$

à l'aide d'une intégration par parties.

2- Montrer que si $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors

$$\Phi(s) = -s \int_1^{+\infty} \frac{\delta(t)}{t^{s+1}} \mathrm{d}t$$

3- Montrer que Φ se prolonge en une fonction continue sur le demi-plan $P^+ = \mathrm{Re}(s) > 0$. Qu'en déduire pour ζ ?

Indications

1-
$$\int_{n-1}^{n} f = f(n) - \int_{n-1}^{n} (t-n+1) f'(t)\,\mathrm{d}t = f(n) - \int_{n-1}^{n} \delta(t) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

2- Soit s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. A l'aide de 1 :

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} + s \int_{1}^{+\infty} \frac{\delta(t)}{t^{s+1}} \mathrm{d}t$$

Donc
$$\Phi(s) = -s \int_{1}^{+\infty} \frac{\delta(t)}{t^{s+1}} \mathrm{d}t$$

3- On montre la continuité de Φ sur tout demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq a$ pour tout $a > 0$. On obtient un prolongement de ζ continu sur $P^{+} \setminus \{1\}$.