Séries entières

1 Soit $S(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{3p}}{(3p)!}$. Domaine de définition de S ? Trouver une EDL simple vérifiée par S.

2 Soit $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. RDCV ?

Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles, puis calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$. On trouve $-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

3 Soit $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n+1}$ et $v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n n!^2} x^{2n}$

a Montrer que les deux RDCV sont infinis.

b Exprimer $u(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

c Justifier l'existence et calculer $\int_0^{\infty} u(x)v(x)dx$

4 Soit $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-x\sin^2 t}$. Trouver $I = \text{def}(f)$. Montrer que f est C^{∞} sur I.

Etudier le DSE de f, calculer $f(x)$.

5 Soit $f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1+x\cos t)dt$; étudier le domaine de définition I, le DSE, la continuité de f sur I.

6 Soit $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$; soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; déterminer le RDCV, puis calculer $f(x)$.

7 Soit I_n le nombre d'involutions de $\{1,...,n\}$; montrer que $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.

Soit $a_n = \frac{I_n}{n!}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. RDCV et somme ? (Utiliser une EDL).

8 Soit $a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+n)}$; existence, équivalent de a_n ? Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. R ? Etude en R^- et $-R^+$.

9 Montrer que si $|z| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$.

10 $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$, $v_{n+1} = -2u_n - 2v_n$. Calculer $f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

11 Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. Montrer que f est continue, C^{∞} sur $I =]-1, +\infty[$, puis DSE. R ?

12 Soit $f(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$, $g(x) = \int_1^{\infty} \frac{dt}{x+t^2}$. Etude, DSE, RDCV ?

13 Soit $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$. Existence, calcul et équivalent en R^- de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

14 DSE de $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$? On peut utiliser $\dfrac{1}{1-x^3}$. DSE de $f(x) = e^{-x}\sin x$?

15 Soit $(p_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $n = o(p_n)$; soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p_n}$; RDCV ? Montrer que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 0$.

16 Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-sh(x)}$. Montrer que f est DSE et préciser le rayon.

17 Soit d_n le nombre de diviseurs de n, et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$. R ? montrer que si $|x| < R$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$;

trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} d_k$; en déduire un équivalent de f en 1. Autre méthode ?

18 Soit r_n le plus petit des modules des racines dans $\mathbb{C}$ de $P_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$. Lim r_n ?

19 On note $\|P\| = \sup\{\,|P(z)| \ / \ |z| = 1\}$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $E = \mathbb{C}[X]$. Montrer que :

$\forall P \in E$, $|P(0)| \leq \|P\|$ (utiliser $\int_0^{2\pi} P(e^{it})dt$) ; cas d'égalité ? Montrer que si $|z| < 1$, $|P(z)| \leq \|P\|$ en

remarquant que $\sup|P|$ est atteint sur le disque fermé.

Montrer que : $\forall P \in \mathbb{C}_d[X]$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \leq \|P\| \max(1, |z|^d)$.

20 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\sin(2tx)\,dt = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$. DSE de cette fonction ?

21 Montrer que sin ne coincide avec une fonction rationnelle sur aucun intervalle I non réduit à un point.
(commencer par le cas où $0 \in I$).

22 Soit $a_n = \int_0^1 \left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)^n dt$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; montrer que $a_n \leq \dfrac{1}{2^n}$; que peut-on en déduire pour le RDCV

R ? Déterminer R, puis calculer $f(x)$. Déterminer $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ et retrouver la valeur de R.

23 $0 < a < 1$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sh(a^n x)$. Montrer que f est C^{∞} sur $\mathbb{R}$. Etablir que f est DSE au voisinage de 0.

Préciser ce développement et son intervalle de validité.

24 Soit $\lambda > 0$; montrer que l'équation suivante admet une unique solution DSE sur $]-1,1[$:

$xy' + \lambda y + xy^2 + \lambda = 0$; montrer que cette solution vérifie $y(x) = O\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ au voisinage de 1.

25 Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ fonction définie sur $\mathbb{C}$. On suppose que :

$\exists\, k > 0, \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, r > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq r \Rightarrow |f(z)| \leq k|z|^n$. Montrer que f est polynomiale.

Même question avec $|\operatorname{Re} f(z)| \leq k|z|^n$, puis $\operatorname{Re} f(z) \leq k|z|^n$.