Séries entières et équations différentielles

1 $xy'' + xy' + 2y = 0$

Identifier une solution non nulle développable en série entière.

Indications

$$y(x) = e^{-x}.\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

2 $4ty'' + 2y' - y = 0$

Identifier une solution non nulle développable en série entière et poursuivre l'étude.

Indications

Après calcul...

$$a_n = \frac{1}{(2n)!}$$

D'où

$$\forall t > 0, y(t) = \mathrm{ch}\sqrt{t}$$

D'où l'idée :

$$t = u^2$$

$y(t) = z\left(\sqrt{t}\right)$ conduit à

$$z'' - z = 0$$

3 $xy'' - (x+3)\,y' + 3y = 0$

Identifier les solutions développables en série entière.

Indications

Le raisonnement usuel conduit à

$$\forall n \geq 0,\ (n+1)(n-3)\,a_{n+1} = (n-3)\,a_n$$

D'où deux solutions indépendantes, $x \to e^x$ et $x \to 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

4 $y' = 1 + y^2$

1- Montrer l'existence d'une série entière de rayon $R \geq 1$ dont la somme y vérifie

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2- Montrer que sur $\left]-1, 1\right[$, $y = \tan$.
3- Montrer que

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geq 0$$

4- Montrer que tan est la somme d'une série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Indications

1- $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 1, (n+1)\, a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k . a_{n-k}$$

On en déduit aisément par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 0, |a_n| \leq 1$$

D'où $R \geq 1$.

2- Primitiver

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1$$

3- Voir le cours.

4- Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour montrer que $R \geq \frac{\pi}{2}$.

5 $xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$

1- Résoudre sur $I =]0, +\infty[$: $xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$, où $\lambda > 0$.

2- Existe-t-il une solution qui admette une limite en 0 ?

3- Existe-t-il une solution développable en série entière au voisinage de 0 ?

Indications

Avec la méthode de variation de la constante :

$$y(x) = x^{-\lambda}\left(C + \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{d}t\right)$$

Seule solution bornée au voisinage de 0 :

$$y(x) = x^{-\lambda}\left(\int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{d}t\right)$$

On encadre :

$$\forall x > 0, \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+x}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}\mathrm{d}t \leq \int_0^x t^{\lambda-1}\mathrm{d}t$$

D'où :

$$\forall x > 0, \frac{1}{\lambda}.\frac{1}{1+x} \leq y(x) \leq \frac{1}{\lambda}$$

Conclusion :

$$\lim_0 y = \frac{1}{\lambda}$$

Remarque

On peut aussi obtenir cette limite avec le théorème d'intégration des relations de comparaison.

On cherche ensuite une solution développable en série entière ; on obtient $R = 1$ et

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+\lambda}$$

6 $xy' + y.\ln(1-x) = 0$

Montrer qu'il existe une solution non nulle développable en série entière au voisinage de 0 ; montrer que $R = 1$.

Indications

$$\forall n \geq 0, (n+1)\, a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1}$$

On choisit $a_0 = 1$ et on montre par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq a_n \leq 1$$

On en déduit que $R \geq 1$; on montre aussi que :

$$\forall n \geq 0, a_n \geq \frac{a_0}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

Donc $R = 1$.

7 $y'' + e^x.y\,(x) = 0$

Montrer que toutes les solutions sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

Indications

On cherche y sous la forme $y\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; on suppose $R > 0$. On obtient

$$\forall n \geq 0, (n+2)\,(n+1)\, a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0$$

On fixe $t > 0$; on note $u_n = |a_n.t^n|$ et $M_n = \max\,(u_0, ..., u_n)$; après calcul :

$$\forall n \geq 0, u_{n+2} \leq \frac{t^2.e^t}{(n+2)\,(n+1)}.M_{n+1}$$

On constate que dès que $(n+2)\,(n+1) \geq t^2.e^t$, (M_n) est stationnaire ; donc (u_n) est bornée.

8 $xy''\,(x) + y'\,(x) + xy'\,(x) = f\,(x)$

On suppose que f est la somme d'une série entière $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$; montrer que l'équation différentielle possède des solutions développables en série entière de rayon R.

Indications

Remarquons d'abord qu'il n'existe pas de solutions développables en série entière avec un rayon $R' > R$.

Cherchons y sous la forme

$$y\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

On obtient $a_1 = b_0$ et :

$$\forall n \geq 1, (n+1)^2\, a_{n+1} = b_n - a_{n-1}$$

Etudions R_a : fixons un réel t tel que $0 < t < R$ et montrons que $(|a_n|\, t^n)$ est majorée.

Notons $u_n = |a_n|\, t^n$ et $B = t^2$. On sait que $(b_n t^n)$ est bornée ; soit $A > 0$ tel que

$$\forall n \geq 0, \left|b_n t^{n+1}\right| \leq A$$

Alors :

$$\forall n \geq 1, (n+1)^2\, u_{n+1} \leq A + t^2 u_{n-1} = A + B.u_{n-1}$$

soit

$$\forall n \geq 1, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{A + B.u_{n-1}}{(n+1)^2}$$

On veut en déduire l'existence d'un majorant M de (u_n).

On cherche donc M tel qu'on puisse montrer par récurrence sur n :

$$\forall n \geq 0,\ 0 \leq u_n \leq M$$

On choisit d'abord $p \geq 1$ tel que $\frac{B}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{2}$, puis

$$M = \max\,(2A, u_0, ..., u_p)$$

9 $a_n = \binom{2n}{n}$

Soit $a_n = \binom{2n}{n}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Trouver le rayon de convergence R.
2. Montrer que f vérifie sur $I =]-R, R[$ l'équation

$$(1-4x) f'(x) = 2f(x)$$

3. Expliciter $f(x)$.

Indications

Pour $x \neq 0$ on note $u_n = |a_n x^n|$; on trouve que

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4|x|$$

On en déduit $R = \frac{1}{4}$, puis $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

10 $u_n = \frac{n!}{(a+1)...(a+n)}$

Soit $a > 0$; pour $n \geq 1$ on pose

$$u_n = \frac{n!}{(a+1)\dots(a+n)}$$

et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$$

Etudier l'existence et en déterminer une expression.

Indications

$R = 1$; posons $v_n = n^a.u_n$; on vérifie que

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où

$$\ln v_n - \ln v_{n-1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit la convergence de la suite $(\ln v_n)$; donc (v_n) converge vers une limite non nulle c. D'où

$$u_n \sim \frac{c}{n^a}$$

On en déduit que f est définie sur $[-1, 1]$ si $a > 1$, $[-1, 1[$ si $0 < a \leq 1$.

Après calculs :

$$\left(x^2 - x\right) f'(x) + (x-a) f(x) + x = 0$$

11 $\frac{\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$

Donner le développement en série entière de

$$f : x \to \frac{\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Indications

On écrit

$$\sqrt{1-x^2}f\left(x\right)=\text{Arcsin}\,x$$

Après dérivation on obtient

$$\left(1-x^2\right)f'\left(x\right)-x.f\left(x\right)=1$$

D'où :

$$\forall n\geq 1,\ \left(n+1\right)a_{n+1}=n.a_{n-1}$$

De plus, $a_0=0$, $a_1=1$. Finalement :

$$a_{2p+1}=\frac{2^{2p}\left(p!\right)^2}{\left(2p+1\right)!}$$

et $R=1$.

12 $\sin\left(\alpha.\text{arcsin}x\right)$

Etudier le développement en série entière de $f:x\to\sin\left(\alpha.\text{arcsin}x\right)$.

Indications

f est de classe C^∞ sur $I=\left]-1,1\right[$ et vérifie sur I :

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+\alpha^2y=0$$

D'où

$$a_0=0,\ a_1=\alpha,\ a_{n+2}=\frac{n^2-\alpha^2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$$

On trouve $R=1$, sauf si $\alpha\in\mathbb{Z}:$ dans ce cas, f est polynomiale.

13 $f\left(t\right)=\int_0^{+\infty}\cos xt.\exp\left(-x^4\right)\text{dx}$

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$; la tracer avec Python ; étudier le développement en série entière de f. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Montrer que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ 4.f^{(3)}\left(t\right)=t.f\left(t\right)$$

Montrer que f s'annule une infinité de fois.

Indications

On montre que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en développant cos, puis intégration terme à terme ; on montre que f tend vers 0 en $+\infty$ avec une intégration par parties ; pour l'équation différentielle, on dérive trois fois sous le signe somme, puis intégration par parties.

Pour finir, supposons par l'absurde $f>0$ sur un intervalle $J=\left[a,+\infty\right[$; alors $f^{(3)}>0$ sur J ; donc f'' strictement croissante ; mais f'' ne peut pas tendre vers une limite non nulle, sinon $|f|$ tendrait vers $+\infty$; donc f'' tend vers 0, donc $f''<0$; on recommence... on arrive à $f'>0$, f croissante, donc $f^{(3)}$ tend vers $+\infty$, contradiction.