Algèbre linéaire 1

1 Soit $f \in L(E,F)$. Montrer que l'image de toute famille liée est liée. Montrer que f est injective SSI l'image de toute famille libre est libre. Montrer que l'image de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ (et non de F !). Montrer que f est surjective SSI l'image de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

2 Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit u et v définis par $u(f) = f'$ et $v(f)$ primitive de f nulle en 0. Montrer que $u, v \in L(E)$. Sont-ils injectifs, surjectifs ? Calculer $u \circ v$. Montrer que $p = v \circ u$ est un projecteur.
Trouver $\operatorname{Im} p$, $\operatorname{Ker} p$. Existe-t-il $w \in L(E)$ tel que $w^2 = u$?

3 Soit f et g deux éléments de $L(E)$ tels que $f \circ g = Id$. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \circ f$, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g \circ f$, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$. Que dire dans le cas où E est de dimension finie ?
On suppose $E = \mathbb{R}[X]$, et f défini par $f(P) = P'$; existence de g ?

4 Soit E un EV de dimension n, a un élément de E, f un élément de $L(E)$. On suppose que $(f(a),..., f^n(a))$ est libre. Montrer que $(a, f(a),..., f^{n-1}(a))$ est une base de E, et que $f \in GL(E)$.

5 $f \in GL(E)$ et $\operatorname{rg} g = 1$. Montrer que $f + g \in GL(E)$ SSI $\operatorname{tr}\, g \circ f^{-1} \neq -1$.

6 Soit $E = \mathbb{R}[X]$, $P_n = X^n + X^{n+1}$. Montrer que $(P_n)_{n\in N}$ est libre, décrire le SEV F engendré, donner sa dimension et un supplémentaire.

7 F, G, H étant des SEV de E, comparer $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$, $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$. Donner des exemples en dimension 3.
Soit E, F, G SEV d'un même EV tels que $F \subset G$, $E \cap F = E \cap G$, $E + F = E + G$. Montrer que $F = G$.

8 Soit B une base de E EV de dimension n, et F un SEV ne contenant aucun vecteur de B. Que dire de $\dim F$?

9 Soit $X = (x_1,..., x_n)$ et $s \leq n$. Soit $Y = (x_1,..., x_s)$. Montrer que $\operatorname{rg} Y \geq \operatorname{rg} X + s - n$.
On suppose X libre ; trouver $\operatorname{rg}(x_1 + x_2, x_2 + x_3,..., x_n + x_1)$ et décrire le SEV engendré ; $\operatorname{rg}(x_i - x_j)_{1\leq i, j\leq n}$?

10 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $f_n = f \times f \times ... \times f$. CNS pour que $(f_n)_{n\in N^*}$ soit libre ?

11 F et G étant des SEV de E, que dire si $F \cup G$ est un SEV de E ?

12 $P_0 = 1$, $P_n' = P_{n-1}$ et $P_n(0) + P_n(1) = 0$ si $n > 0$. Montrer que cela définit une suite unique ; d° P_n ? Terme dominant ? Montrer que $P_n(X) + P_n(X+1) = \dfrac{2}{n!} X^n$ et que P_n est le seul polynôme vérifiant cette formule.
Montrer que $P_n(1 - X) = (-1)^n P_n(X)$. Etudier P_n en 0, 1, 1/2 et ses variations sur [0,1].

13 Soit u élément de $L(E)$ tel que : $\forall\, x \in E$, $\exists \lambda \in K$, $u(x) = \lambda x$. Montrer que : $\exists \lambda \in K$, $u = \lambda Id$.
Soit u, v éléments de $L(E)$ tels que : $\forall\, x \in E$, $\exists \lambda \in K$, $u(x) = \lambda v(x)$. Montrer que : $\exists \lambda \in K$, $u = \lambda v$.

14 Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $f_a : x \to |x - a|$ (remarquer que f_a n'est pas dérivable au point a), g_n : fonction caractéristique de]0, n[, $f_n : x \to \cos^n x$, $g_a : x \to \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ ($a > 0$) (utiliser les propriétés des polynômes).

15 K = $\mathbb{Q}$. Montrer que (1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$), $(\ln p)_{p\in P}$ sont libres (où P est l'ensemble des nombres premiers).

16 Soit $F \subset E = M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients de toute ligne et de toute colonne est nulle. Montrer que F est un SEV de E et trouver sa dimension.

17 Soit D une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les coefficients diagonaux de D sont distincts SSI $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est libre.

18 Soit E' un SEV de E, F' un SEV de F, et $u \in L(E,F)$.
Montrer que $\dim u(E') \geq \dim E' - \dim \operatorname{Ker} u$ et $\dim u^{-1}(F') \leq \dim F' + \dim \operatorname{Ker} u$.
Plus difficile : si $E = F$, $\dim u^{-1}(E') \geq \dim E'$.

19 Soit E un EV de dimension finie, f et g des éléments de $L(E)$.
a Si $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$, montrer que ces sommes sont directes.
b Montrer que : $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$ SSI $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$.

20 $a_{i,j} = i + j$, $b_{i,j} = (i+j+1)^2$. rang A, rang B ?

21 Soit E EV de base $B = (e_1,...,e_n)$. Chercher les SEV stables par tout automorphisme permutant B.

22 Soit X ensemble fini non vide, à n éléments. Montrer que $\mathbb{R}^X$ est de dimension finie n sur $\mathbb{R}$.
Soit X un ensemble infini. Montrer que $\mathbb{R}^X$ n'est pas de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

23 Soit $n = \dim E$, et $F_1,...,F_k$ des SEV de E tels que $\sum_{j=1}^{k} \dim F_j > n(k-1)$.
Montrer que leur intersection est différente de $\{0\}$.

24 Soit $n = \dim E$, $u \in L(E)$, $0 < k < n$. Si tout SEV de dimension k est stable par u, que dire de u ?

25 Soit $h \in L(E)$; caractériser les SEV F de E tels que $h(h^{-1}(F)) = h^{-1}(h(F))$.

26 Soit (L_n) une suite croissante de parties libres de E. Montrer que leur réunion est libre.

27 Soit a et b des éléments distincts de K, et $P_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k}$. Montrer que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre.

28 Montrer que : $\forall\, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\exists\,!\, P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X+1) + P(X-1) = Q(X)$. On pourra commencer par le cas de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que si Q est pair (impair) alors P est pair (impair).

29 Soit G contenu dans $(L(E), \circ)$, stable et constituant un groupe pour la loi induite. Montrer que e est un projecteur et que les éléments de G ont tous la même image et le même noyau.

30 Soit U et V des matrices colonnes d'ordre n. On pose $H = I_n - \alpha U\, {}^tV$. Trouver à quelle condition H est inversible, et dans ce cas calculer son inverse.

31 Soit G un groupe, K un corps, $e_1,...,e_n$ des morphismes distincts de G dans K^*.
Montrer que $(e_1,...,e_n)$ est libre dans K^G.