Séries entières

Contents

Introduction

Citer des fonctions dites “usuelles” ; points communs à ces fonctions ? En particulier, que dire de leurs zéros ?
Soit f la restriction de exp à $\mathbb{R}^-$.
Comment la prolonger en une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$?
Comment la prolonger en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$?
Y a-t-il unicité du prolongement ?

Réponse

$$f(x) = e^x + C.x^{n+1}$$

$$f(x) = e^x + C.e^{-\frac{1}{x}}$$

1 Généralités

1.1 Séries entières (power series)

Une série entière est une série de fonctions $\sum a_n z^n$, où $a = (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

1.2 Lemme d'Abel

Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que

$$|z| < |z_0|$$

la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

$$\forall n \geq 0, |a_n.z^n| = |a_n.z_0^n| . \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M. \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Domination par une série géométrique convergente.

1.3 Rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$

1.3.1 Définition

Notation non officielle :

$$B_a = \{t \geq 0 \,/\, (a_n t^n) \,\text{bornée}\}$$

On appelle rayon de convergence la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de B_a.
On le notera R_a, ou R.

1.3.2 Premiers exemples

Trouver B_a dans les cas suivants :
$a_n = 1$; $a_n = n$; $a_n = \frac{1}{2^n}$; $a_n = n!$; $a_n = \frac{1}{n!}$

Réponse

- $a_n = 1$; $B_a = [0, 1]$
- $a_n = n$; $B_a = [0, 1[$
- $a_n = \frac{1}{2^n}$; $B_a = [0, 2]$
- $a_n = n!$; $B_a = \{0\}$
- $a_n = \frac{1}{n!}$; $B_a = \mathbb{R}+$

1.3.3 Théorème

- Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $|z| > R$, $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

En particulier, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration

Cas où $|z| < R$: il existe $t \in B_a$ tel que $|z| < t \leq R$.

Le lemme d'Abel montre que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

1.3.4 Questions fréquentes

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé ; que dire de R si $(a_n z^n)$

1- est bornée.
2- est non bornée.
3- tend vers 0.
4- converge.
5- diverge.
6- possède une suite extraite bornée.
7- possède une suite extraite non bornée.
8- tend vers une limite non nulle L.

Réponses

1- $R \geq |z|$.
2- $R \leq |z|$.
3- $R \geq |z|$.
4- $R \geq |z|$.
5- $R \leq |z|$.
6- Rien.
7- $R \leq |z|$.
8- $R = |z|$.

1.4 Exemples

$a_n = 1$; $a_n = \frac{1}{n}$; $a_n = \frac{1}{n^2}$; $a_n = \frac{1}{2^n}$; $a_n = n!$; $a_n = \frac{1}{n!}$;
$a_n = n$; $a_n = n^{(-1)^n}$; $a_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$; $a_n = \sqrt{n!}$; $\sum z^{n^2}$

Réponse

Pour $a_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$:

Soit $t > 0$ et $u_n = a_n t^n$; alors :

$$\forall n > 0,\ \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{t}{\sqrt{n}}$$

Suite qui tend vers 0 ; donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

Donc $R = +\infty$.

1.5 Propriétés du rayon de convergence

1.5.1 Comparaison

Théorème

Si (a_n) est dominée par (b_n) :

$$R_a \geq R_b$$

Si $a_n \sim b_n$?

Démonstration

Si (a_n) est dominée par (b_n), $B_b \subset B_a$, d'où $R_a \geq R_b$.

Si $a_n \sim b_n$, chacune des deux est dominée par l'autre, donc $R_a = R_b$.

1.5.2 Série $\sum n a_n z^n$

Théorème

Le rayon de convergence R' de

$$\sum n a_n z^n$$

est égal au rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.

Démonstration

$R' \leq R$ car (a_n) est dominée par $(n.a_n) = (b_n)$.

Soit $r \in]0, R[$; fixons s dans $]r, R[$; on a alors :

$$r < s < R$$

Remarquons que $b_n.r^n = n.a_n.r^n = a_n s^n.n\left(\frac{r}{s}\right)^n$; or
- $(a_n.s^n)$ tend vers 0 car $0 < s < R$
- $n\left(\frac{r}{s}\right)^n$ tend vers 0 par croissances comparées

Donc $(b_n.r^n)$ tend vers 0, donc $R' \geq r$.

En conclusion :

$R' \geq r$ pour tout élément $r \in]0, R[$, donc :

$$R' \geq R$$

1.5.3 Série $\sum n^\alpha.a_n z^n$

Exercice

Pour tout α réel, le rayon de convergence R' de

$$\sum n^\alpha.a_n z^n$$

est égal au rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.

Démonstration

Pour $\alpha = p$ entier, récurrence sur p.
Pour le cas général, on utilise $p = \lfloor \alpha \rfloor$:

n^p est dominé par n^α et n^α est dominé par n^{p+1}.

1.5.4 Exercice

Que dire de R_b dans le cas où
- $b_n = |a_n|$
- $b_n = \frac{1}{2^n} a_n$
- $b_n = \frac{a_n}{n!}$
- $b_n = a_{n+1}$

Réponse

- $R_b = R_a$
- $R_b = 2.R_a$
- Si R_a est non nul, R_b est infini ; si $R_a = 0$, on ne peut pas conclure ; exemples ?
- $R_b = R_a$

Remarque

Avec ce qui précède, on constate que $\sum a_n z^n$ et $\sum (n+1)\, a_{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence :

La série dérivée a même rayon que la série de départ.

1.5.5 Utilisation de la règle de d'Alembert

Exercice

A l'aide de la règle de d'Alembert, montrer que si $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ admet une limite $L \in [0, +\infty]$, alors

$$R = \frac{1}{L}$$

1.5.6 Un lemme utile

On suppose R non nul ; montrer que

$$\exists A > 0, \exists B > 0, \forall n \geq 0, |a_n| \leq A.B^n$$

Si de plus $a_0 = 1$, montrer que

$$\exists C > 0, \forall n \geq 0, |a_n| \leq C^n$$

Démonstration

Soit $t \in]0, R[$; $(a_n t^n)$ est bornée :

$$\exists M > 0, \forall n \geq 0, |a_n.t^n| \leq M$$

Il suffit de choisir $A = M$ et $B = \frac{1}{t}$.

Si de plus $a_0 = 1$:

$A \geq 1$, donc $C = AB$ convient.

1.6 Convergence normale

Théorème

La convergence d'une série entière est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$.

Démonstration

Il faut majorer $|a_n.z^n|$ par un u_n, indépendant de z, qui soit le terme général d'une série (numérique) convergente.

Réponse

$$u_n = |a_n.r^n|$$

Corollaire

La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

1.7 Somme

1.7.1 Théorème

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$; soit $c_n = a_n + b_n$ et

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Alors :

$$R_c \geq \min(R_a, R_b)$$

Si $R_a \neq R_b$:

$$R_c = \min(R_a, R_b)$$

Evidemment, $h = f + g$ sur le disque ouvert de rayon $\min(R_a, R_b)$.

1.7.2 Démonstration

Supposons par exemple

$$0 < R_a < R_b$$

- si $|z| < R_a$, alors $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes, donc $\sum c_n z^n$ converge.
- si $R_a < |z| < R_b$, alors $\sum a_n z^n$ diverge et $\sum b_n z^n$ converge, donc $\sum c_n z^n$ diverge.

Conclusion :

$$R_c = R_a$$

1.7.3 Exemples

$R_c = \min(R_a, R_b)$: si $f = g$.
$R_c > \min(R_a, R_b)$: si $f = -g$ avec un rayon fini.
Un exemple où $R_a = 1$, $R_b = 1$, $R_{a+b} = 2$?

Réponse

$a_n = -1$, $b_n = 1 + \frac{1}{2^n}$.

1.8 Produit de Cauchy

1.8.1 Théorème

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$; soit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

et $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$; alors :

$$R_c \geq \min(R_a, R_b)$$

De plus, $h = f.g$ sur le disque ouvert de rayon $\min(R_a, R_b)$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$.
Posons $u_n = a_n.z^n$, $v_n = b_n z^n$ et

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.v_{n-k}$$

On constate que $w_n = c_n.z^n$.
Les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étant absolument convergentes, on sait que :

- $\sum w_n$ est absolument convergente
- $\sum_{n=0}^{\infty} u_n . \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$

Conclusion :

$$h(z) = f(z) . g(z)$$

1.8.2 Exemples

Avec $\frac{1}{1-z}$, $1-z$, $\frac{2-z}{1-z} = 1 + \frac{1}{1-z}$, $\frac{1-z}{2-z}$...

1.8.3 Intégrité

Exercice

Soit f et g deux fonctions non nulles sommes de séries entières de rayon non nuls.

Alors $h = fg$ est non nulle.

1.9 Quelques fonctions usuelles

1.9.1 Définitions

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\mathrm{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\mathrm{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \mathrm{ch} iz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\mathrm{i}.\mathrm{sh} iz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Toutes ces fonctions sont entières, c'est-à-dire sommes d'une série entière sur $\mathbb{C}$.

1.9.2 Propriétés

$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$
$\cos^2 + \sin^2 = 1$
$\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$

Démonstration

Posons $u_n = \frac{a^n}{n!}$, $v_n = \frac{b^n}{n!}$ et

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k . v_{n-k}$$

On constate que

$$w_n = \frac{1}{n!}(a+b)^n$$

Les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étant absolument convergentes :

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

1.9.3 Remarque

Passage d'une formule de trigonométrie à une formule de trigonométrie hyperbolique :
On remplace
- cos par ch.
- sin par i.sh.
- tan par i.th.

2 Série entière d'une variable réelle

2.1 Primitivation de la somme d'une série entière

2.1.1 Théorème

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ définie sur $]-R, R[$; alors

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

est une primitive de f sur $]-R, R[$.

Les deux ont le même rayon de convergence.

Démonstration

Application directe du théorème de primitivation terme à terme.

2.1.2 Exemple à connaître : ln

$$\forall x \in I =]-1, 1[\,, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

On en déduit que

$$\forall x \in I, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\forall x \in I, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$$

Exercice

En 1 ?

Réponse

En 1, la série converge (TSA).

Montrons que l'égalité est également vérifiée en ce point :

Notons

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} . \frac{x^k}{k}$$

$$\forall x \in J = [0, 1]\,, |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

majorant indépendant de x et qui tend vers 0.

Donc la série converge uniformément sur J.

Donc la somme est continue sur J.

Par passage à la limite, l'égalité est aussi vérifiée en 1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

2.1.3 Exemple à connaître : arctan

$$\forall x \in I = \left]-1, 1\right[, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

D'où

$$\forall x \in I, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$$

En -1 ? en 1 ?

De manière analogue au cas de $\ln(1+x)$, on montre qu'il y égalité au point 1.

2.2 Dérivation

2.2.1 Théorème

La somme d'une série entière

- est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $I = \left]-R, R\right[$.
- Ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.
- Toutes ont le même rayon de convergence.

Démonstration

Théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions C^1 :

On note

$$u_n(x) = a_n x^n$$

- Les u_n sont de classe C^1 sur I.
- La série converge simplement sur I.
- La série des dérivées converge uniformément sur tout segment contenu dans I.

Donc la somme est de classe C^1 sur I.

On en déduit aisément par récurrence sur p que la somme est de classe C^p sur I.

2.2.2 Expression des dérivées

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \ f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1}$$

$$\forall p \geq 0, \forall x \in \left]-R, R\right[, \ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n.(n-1)\ldots(n-p+1).a_n.x^{n-p}$$

$$\forall p \geq 0, \forall x \in \left]-R, R\right[, \ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!}.a_n.x^{n-p}$$

2.2.3 Expression des coefficients

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ définie sur $\left]-R, R\right[$, avec R non nul.

Alors, pour tout $p \geq 0$:

$$a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

2.2.4 Remarque

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n,

$$a_n = b_n$$

2.3 Exemples

Donner une expression simple de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \; g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

Réponse

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ sur $I =]-1,1[$; d'où $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$; $g(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.

2.4 Des fonctions C^∞

En utilisant des séries entières, montrer rapidement que certaines fonctions sont de classe C^∞ :

2.4.1 $f : t \to \frac{\sin t}{t}$ sur $\mathbb{R}$

2.4.2 $g : t \to \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ sur $]-\pi, \pi[$

Il faut l'écrire

$$g(t) = \frac{\frac{\sin t - t}{t^2}}{f(t)}$$

Application

Soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) . \sin nt \mathrm{d}t$$

On montre que (I_n) tend vers 0 (comment ?).

Par ailleurs, on montre que

$$\forall n \geq 0, \; J_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Pour cela, on calcule $J_{2n+3} - J_{2n+1}$.

De là on déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

2.4.3 $t \to \frac{t.\sin t}{\mathrm{ch}t - 1}$ sur $\mathbb{R}$

$$h(t) = \frac{f(t)}{\frac{\mathrm{ch}t-1}{t^2}}$$

2.5 Exemple : la fonction J_0 de Bessel

2.5.1 $(E) : xy'' + y' + xy = 0$

Que dire de la dimension de l'ensemble des solutions sur $I =]0, +\infty[$?

Sur $J =]-\infty, 0[$? Sur $\mathbb{R}$?

Réponse

$\dim S_I = 2 = \dim S_J$; qu'en déduire pour $\dim S_{\mathbb{R}}$?

L'application

$$y \to (y(1), y'(1), y(-1), y'(-1))$$

est linéaire et injective de $S_{\mathbb{R}}$ vers $\mathbb{R}^4$; donc

$$0 \leq \dim S_{\mathbb{R}} \leq 4$$

On va maintenant améliorer cet encadrement.

2.5.2 Chercher les solutions de (E) développables en série entière.

Rédaction

Supposons qu'il existe une série entière $\sum a_n.x^n$

- de rayon de convergence R non nul,
- et dont la somme f est solution de (E) sur $I =]-R, R[$.

Alors, on sait que f est de classe C^∞ sur I, dérivable terme à terme, et que la somme d'une série entière n'est nulle sur I que si les coefficients sont nuls.

Après calculs, on obtient :

Réponse

$n^2.a_n = -a_{n-2}$, $a_1 = 0$.

$$\forall n \geq 0,\ a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2^n.n!)^2} a_0$$

Il est nécessaire de s'assurer que le rayon de convergence de la série obtenue est non nul.

Ici, il est infini :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n.n!)^2} x^{2n}$$

2.5.3 Expression intégrale

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x.\sin t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Fixons $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall t \in I = [0, \pi], \cos(x.\mathrm{sin}t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} (\mathrm{sin}t)^{2n}$$

Pour $n \geq 0$, on étudie

$$I_n = \int_0^\pi \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} (\mathrm{sin}t)^{2n}\,\mathrm{d}t \right| = \int_0^\pi \frac{1}{(2n)!} x^{2n} (\mathrm{sin}t)^{2n}\,\mathrm{d}t$$

$$\forall n \geq 0, I_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi (\mathrm{sin}t)^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n}}{(2n)!}.w_{2n}$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 0,\ 0 \leq I_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}.w_{2n} \leq \pi \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

d'où la convergence de la série $\sum I_n$.

On applique alors le théorème d'intégration terme à terme...

2.6 Complément : étude en R^-

2.6.1 Exercice 1

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$; on suppose $R = 1$, les b_n positifs, et $\sum b_n$ divergente.

Que montrer ?

Réponse

On peut montrer que

$$\lim_1 g = +\infty$$

Démonstration

On sait que g est croissante sur $[0,1[$; donc g admet une limite L en 1^-, finie ou non.

Supposons que g est bornée, donc L finie. Notons

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

g_n est continue sur $[0,1]$; sa limite en 1 est

$$L_n = g_n(1) = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$\forall n \geq 0, \forall x \in [0,1[\,,\ g_n(x) \leq g(x)$$

Donc : $\forall n \geq 0,\ L_n \leq L$.

Conclusion, $\sum b_n$ converge. On a montré la contraposée.

2.6.2 Exercice 2

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$; on suppose $R = 1$, les b_n positifs, et $\sum b_n$ convergente.

Que montrer ?

Réponse

On peut montrer que la série converge normalement sur $[0,1]$. Donc g est continue sur $[0,1]$.

2.6.3 Exercice 3

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ \ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

On suppose les deux rayons supérieurs ou égaux à 1, les b_n positifs, et $\sum b_n$ divergente.

Montrer que :

- si $a_n = o(b_n)$, alors $f \underset{1}{=} o(g)$
- si $a_n \sim b_n$, alors $f \sim g$ au voisinage de 1.

Démonstration

Supposons $a_n = o(b_n)$; fixons $\varepsilon > 0$; soit n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.b_n$$

Donc

$$\forall x \in [0,1[\,, |f(x)| \leq \left|\sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n\right| + \frac{\varepsilon}{2}.g(x)$$

Puis

$$\forall x \in]0,1[\,, \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \frac{1}{g(x)}\left|\sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour conclure :

$$\exists a \in]0,1[\,, \forall x \in]a,1[\,, \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \varepsilon$$

2.6.4 Application : la continuité radiale

Exercice

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; on suppose que $f(1)$ existe.

Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.

Remarquons que $R \geq 1$ et que si $R > 1$, le résultat est évident.

Démonstration

En remplaçant f par $f - f(1)$, on se ramène au cas où $f(1) = 0$. On notera

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Dans ce cas, (s_n) tend vers $f(1) = 0$. Donc $s_n = o(1)$.

Posons

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, g(x) = \frac{f(x)}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k . x^k$$

L'exercice précédent s'applique :

$s_n = o(1)$, donc $g(x) \underset{x \to 1}{=} o\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^n\right)$, ce qui signifie exactement :

$$\lim_{1} f = 0$$

f est donc continue sur $[0, 1]$.

2.6.5 Un exemple

Soit $a_n = \ln n$.

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln n . x^n$$

Montrer que $R = 1$, trouver la limite de f en 1, un équivalent, puis un développement asymptotique de f au voisinage de 1.

Réponse

$$\forall x \in \left]0, 1\right[, f(x) \geq \ln 2 . \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \ln 2 . \frac{x^2}{1-x}$$

ce qui prouve que f tend vers $+\infty$ en 1^-.

On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; soit

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$$

On reconnaît un produit de Cauchy :

- $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$ et $a_0 = 0$.
- $b_k = 1$.

$$H_n = \sum_{k=0}^{n} a_k . b_{n-k}$$

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

qui est un équivalent de f en 1 d'après l'exercice 2.

Plus précisément

On sait que $a_n = H_n - \gamma + d_n$, où (d_n) tend vers 0 ; d'où

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \ f(x) = g(x) - \frac{\gamma}{1-x} + h(x)$$

avec, toujours d'après l'exercice 2 : $h(x) \underset{x \to 1}{=} o\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

On peut continuer

$a_n = H_n - \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} - \frac{\gamma}{1-x} + \frac{1}{2}\ln(1-x) + o(\ln(1-x))$$

3 Fonctions développables en série entière

3.1 Définitions

3.1.1 Fonction DSE

Soit $r > 0$; soit $I =]-r, r[$; soit $f \in C^0(I, \mathbb{C})$.

On dit que f est développable en série entière s'il existe une série entière dont la somme est f.

3.1.2 Série de Taylor

Soit $r > 0$; soit $I =]-r, r[$; soit $f \in C^\infty(I, \mathbb{C})$; soit

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

On appelle série de Taylor de f la série $\sum a_n x^n$.

3.1.3 Théorème

Pour que f soit développable en série entière sur I, il est nécessaire que f soit de classe C^∞.

Si f est la somme d'une série entière, cette série entière est la série de Taylor.

3.1.4 Remarques

Il est possible que la série de Taylor possède un rayon de convergence R nul, ou que $R < r$.
Il est possible que la série de Taylor converge, mais que sa somme g soit différente de f.

Dans le cas où $R > 0$, que dire de la série de Taylor de g ?

Réponse

f et g ont la même série de Taylor ; g est automatiquement développable en série entière.

3.2 $x \to (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$).

Théorème

$x \to (1+x)^\alpha$ est DSE sur $J =]-1, 1[$.

Démonstration

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$; soit $f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$.

f est de classe C^∞ sur $I =]-1, +\infty[$ et

$$\forall x \in I, \forall n \geq 0,\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = H_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix}$$

Pour la série de Taylor, montrons que $R = 1$:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $u_n = a_n x^n$.

$$\forall n \geq 2, \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \left|\frac{\alpha - n + 1}{n}\right| . |x|$$

qui tend vers $|x|$.

Donc $\sum u_n$ diverge si $|x| > 1$ et converge si $|x| < 1$.

Dernière étape

Il reste à montrer que f est égale la somme s de la série de Taylor.

Pour cela, on montre que f et s sont solutions de

$$\begin{cases} (1+x)\, y' = \alpha y \\ y\,(0) = 1 \end{cases}$$

3.3 Exercice : arcsin

3.3.1 Développement en série entière

On utilise le précédent sur $J =]-1, 1[$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$$

avec

$$a_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}$$

D'où

$$\forall x \in J, \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1}$$

avec

$$b_n = \frac{(2n)!}{(2n+1)\,(2^n.n!)^2}$$

3.3.2 Etude aux bornes

Rappel, la formule de Stirling (au programme) :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

On peut montrer que $\sum b_n$ converge de plusieurs façons :

- en calculant un équivalent de b_n : $\frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$ en utilisant la formule de Stirling.
- en utilisant un exercice antérieur.
- ou à l'aide de $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ avec l'exercice suivant.

3.3.3 Exercice

Soit (b_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = 1 - \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Que dire de (b_n) ?

Réponse

Soit α un réel. Soit $(c_n) = (n^\alpha b_n)$. On étudie $\frac{c_n}{c_{n-1}}$.

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

On constate que pour $\alpha = \frac{3}{2}$:

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Donc

$$\mathrm{ln} c_n - \mathrm{ln} c_{n-1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où la convergence de $(\mathrm{ln} c_n)$, d'où la convergence de (c_n) vers une limite strictement positive C, d'où la conclusion :

$$b_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$$

3.4 C^∞ mais non DSE

On définit f par

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

si $x > 0$; on la prolonge au choix en une fonction paire, impaire, ou nulle sur $]-\infty, 0]$.

On va montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; quelle est sa série de Taylor ?

1e étape

On montre par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 0, \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}.\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

où P_n est un polynôme. On sait que

$$\lim_{u \to +\infty} u^{2n}.e^{-u} = 0$$

Il en découle que

$$\lim_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$$

2e étape

On utilise le théorème de classe C^k par prolongement, qui montre que pour tout $k \geq 1$, f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

Conclusion

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la somme de la série de Taylor de f est nulle, mais f ne l'est pas.

3.5 Les fractions rationnelles

3.5.1 Rappel

Soit $R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle ; on supposera

$$P \wedge Q = 1$$

La partie entière $E(X)$ est ?

Réponse

Le quotient de P par Q. On peut écrire

$$R = E + \frac{P_1}{Q}$$

De plus, $\frac{P_1}{Q}$ est combinaison linéaire de termes de la forme

$$\frac{1}{(X-a)^n}$$

où a décrit l'ensemble des racines de Q.

3.5.2 Développement en série entière

Soit $a \in \mathbb{C}$, non nul, et $n \in \mathbb{N}^*$; soit

$$f : z \to \frac{1}{(z-a)^n}$$

f est développable en série entière, de rayon $R = |a|$.

Démonstration

Facile pour $n = 1$; ensuite produit de Cauchy.
Autre méthode :
On utilise $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = -n$.
Autre méthode :
Dérivation ; par exemple,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1}$$

bien plus rapide par dérivation qu'avec $(1+u)^\alpha$.

Corollaire

Si 0 n'est pas un pôle de R, $z \to R(z)$ est somme d'une série entière.

D'après le théorème sur le rayon de convergence d'une somme, le rayon de convergence R est au moins r, minimum des modules des pôles de $R(X)$.

3.5.3 Le rayon

Exercice

Le rayon est exactement r, minimum des modules des pôles de $R(X)$.

Démonstration

C'est facile s'il existe un seul pôle ... ?
de module r.
Cas général : il existe au moins un pôle a de module r ; on constate que

$$\lim_{t \to 1^-} |R(ta)| = \lim_{t \to 1^-} \left| \frac{P(ta)}{Q(ta)} \right| = +\infty$$

Donc le rayon R ne peut pas dépasser $r = |a|$.

4 Exercices

4.1 Avec une équation différentielle

Etudier le développement en série entière de

$$f : x \to \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$$

Réponse

On remarque que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $f(\mathrm{sh} u) = e^{\frac{u}{2}}$.
D'où f vérifie (E) :

$$\left(1+x^2\right) y'' + xy' - \frac{1}{4} y = 0$$

Après calculs :
$\forall n \geq 0, (n+2)(n+1) a_{n+2} = \left(\frac{1}{4} - n^2\right) a_n,\ a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$; $R = 1$.

Synthèse

D'après le théorème de Cauchy linéaire, $1+x^2$ ne s'annulant pas $I = \left]-1, 1\right[$, le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(1+x^2\right) y'' + xy' - \frac{1}{4} y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

admet une solution unique sur I.
La somme de la série entière touvée est donc f.

4.2 Avec une série double

Etudier le développement en série entière de

$$f : x \to \exp\left(e^x\right)$$

Réponse

Soit x réel ou complexe quelconque.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (nx)^p$$

On va utiliser le théorème de Fubini : on note

$$u_{n,p} = \frac{1}{n!p!} (n.x)^p$$

Ensuite, $v_{n,p} = |u_{n,p}|$; puis

$$S_n = \sum_{p=0}^{\infty} v_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{n!p!} |n.x|^p$$

Existence de S_n ?

$$\forall n \geq 0,\ S_n = \frac{1}{n!} \left(e^{|x|}\right)^n$$

Conclusion ?
S_n est le terme général d'une série convergente, dont la somme est $\exp\left(e^{|x|}\right)$.
Donc le théorème de Fubini s'applique ; finalement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!}\right) .x^p$$

4.3 $\tan$ est développable en série entière sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

4.3.1 Les dérivées de $\tan$

Pour tout $n \geq 0$, $\tan^{(n)} \geq 0$ sur $J = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Démonstration

$\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$, où P_n vérifie $P_{n+1} = \left(1+X^2\right) P_n'$.

4.3.2 $\tan$ est DSE sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Démonstration

Soit $x \in J$; soit $n \geq 0$; $\tan x = s_n(x) + r_n(x)$, avec

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k, \ \ r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x)$$

et

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n \tan^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

Fixons $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$; on remarque que $I_n(x) \leq I_n(y)$ et $0 \leq r_n(y) \leq \tan(y)$.

Donc :

$$\forall n \geq 0,\ 0 \leq r_n(x) \leq r_n(y) \,.\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} \leq \tan y.\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}$$

Conclusion ?

4.4 $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.\cos\left(n^2 x\right)$

4.4.1 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.\cos\left(n^2 x\right)$

Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse

$$\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \left|e^{-n}.\cos\left(n^2 x\right)\right| \leq e^{-n}$$

Majoration indépendante de x par le terme général d'une série numérique convergente.

Donc la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Les termes de la série étant continus, la somme est continue.

4.4.2 C^{∞}

Montrer que f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$; quelle est sa série de Taylor ?

4.4.3 DSE ?

Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est nul ; conclusion ?

4.4.4 Réponse

$$\forall p \geq 0,\ f^{(2p)}(0) = (-1)^p \,.\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.\left(n^2\right)^{2p}$$

On sait que $\sum a_p.x^p$ et $\sum |a_p|\, x^p$ ont le même rayon de convergence.

Soit $x > 0$. On va montrer que $\sum \frac{\left|f^{(2p)}(0)\right|}{(2p)!}.x^{2p}$ diverge avec le théorème de Fubini :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.\left(n^2\right)^{2p} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}\left(n^2\right)^{2p} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.\mathrm{ch}\left(n^2 x\right)$$

On obtient une série qui diverge. Donc

$$R = 0$$

4.5 $\sum_{k=1}^{p} u_k = n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche le nombre a_n de solutions dans $\mathbb{N}^p$ de

$$\sum_{k=1}^{p} u_k = n$$

4.5.1 Méthode élémentaire

On dispose d'un tableau de taille $n+p-1$ dans lequel on range n objets identiques, et $p-1$ séparateurs.

Nombre de possibilités :

$$\binom{n+p-1}{n}$$

4.5.2 Avec sommation par paquets

Pour $x \in \left]-1,1\right[$, et $(u_1,...,u_p) \in \mathbb{N}^p$, on note

$$a_{u_1,...,u_p} = x^{u_1+...+u_p}$$

et on calcule

$$\sum_{(u_1,...,u_p)\in\mathbb{N}^p}^{\infty} x^{u_1+...+u_p}$$

en sommant par paquets de deux manières différentes.

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \; \frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{u_1=0}^{\infty} x^{u_1} . \sum_{u_2=0}^{\infty} x^{u_2} ... \sum_{u_p=0}^{\infty} x^{u_p}$$

Donc

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \; \frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{(u_1,...,u_p)\in\mathbb{N}^p}^{\infty} x^{u_1+...+u_p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Or

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \; \frac{1}{(1-x)^p} = (1-x)^{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_n = \frac{(-p)(-p-1)...(-p-n+1)}{n!}(-1)^n = \binom{n+p-1}{n}$$

5 Compléments

5.1 La continuité radiale

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; on suppose que $f(z_0)$ existe.

Alors la série converge uniformément sur

$$K = [0, z_0]$$

et f est continue sur cet intervalle.

On se ramène au cas où $z_0 = 1$.

5.1.1 Un cas particulier simple

Le cas où $\sum a_n$ converge absolument.

Dans ce cas, la série converge normalement sur $[0,1]$:

$$\forall n \geq 0, \forall x \in [0,1], \; |a_n x^n| \leq |a_n|$$

Majoration indépendante de x par le terme général d'une série numérique convergente.

Donc la série converge normalement sur $[0,1]$.

5.1.2 Un autre cas particulier simple

Le cas où

$$a_n = (-1)^n b_n$$

avec (b_n) décroissante de limite nulle.

Dans ce cas, on note

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k .b_k.x^k$$

et on constate que

$$\forall x \in J = [0,1], |R_n(x)| \leq b_{n+1}.x^{n+1} \leq b_{n+1}$$

majorant indépendant de x et qui tend vers 0.

5.1.3 Démonstration du cas général

On note

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

Soit $m_n = \sup_{k \geq n} |r_k|$; remarquons que $a_k = r_{k-1} - r_k$ et que (m_n) tend vers 0 (voir plus loin).

Etudions R_n :

$$\forall x \in [0,1], R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (r_{k-1} - r_k) x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k \left(x^{k+1} - x^k\right)$$

Justification ? Ensuite, il faut majorer soigneusement ; on obtient :

$$\forall x \in [0,1], |R_n(x)| \leq 2m_n$$

5.1.4 Lemme : lim sup

Soit (u_n) une suite de réels de limite L ; soit

$$v_n = \sup_{k \geq n} u_k$$

La suite (v_n) tend aussi vers L.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$$

Soit $n \geq n_0$:

$$\forall k \geq n,\ L - \varepsilon \leq u_k \leq L + \varepsilon$$

Par passage à la borne supérieure :

$$L - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq L + \varepsilon$$

Remarque

Si (u_n) est seulement bornée, (v_n) est décroissante et converge vers une limite appelée $\lim\sup u_n$,

et qui est la plus grande des valeurs d'adhérence de (u_n).

5.2 Fonctions entières bornées sur $\mathbb{C}$

5.2.1 $I_p(r) = 2\pi.a_p.r^p$

Exercice

On note $I = [0, 2\pi]$.

Soit f somme d'une série entière de rayon $R > 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Soit $r \in]0, R[$; soit

$$I_p(r) = \int_0^{2\pi} f\left(r.e^{it}\right) e^{-ipt} \mathrm{d}t$$

Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ I_p(r) = 2\pi.a_p.r^p$$

Démonstration

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I,\ \left|a_n r^n e^{int} e^{-ipt}\right| = |a_n r^n|$$

indépendant de t et terme général d'une série qui converge.

Donc la série converge normalement sur le segment $I = [0, 2\pi]$ et on peut permuter série et intégrale :

$$I_p(r) = \int_0^{2\pi} f\left(r.e^{it}\right) e^{-ipt} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n r^n e^{int} e^{-ipt} \mathrm{d}t$$

$$I_p(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} \mathrm{d}t$$

Un calcul facile montre que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ \int_0^{2\pi} e^{int} \mathrm{d}t = 0$$

D'où la conclusion.

5.2.2 Le théorème de Liouville

Exercice

Soit f fonction entière et bornée sur $\mathbb{C}$; montrer que f est constante ; que dire de cos ?

Démonstration

On note $M = \|f\|_\infty$. Fixons $p \geq 0$.

$$\forall r > 0, I_p(r) = 2\pi.a_p.r^p$$

De plus :

$$\forall r > 0, |I_p(r)| \leq 2\pi.M$$

Donc :

$$\forall r > 0, |a_p| r^p \leq M$$

Donc si $p \geq 1$, $a_p = 0$. Conclusion, f est constante.

5.3 Les fonctions analytiques

5.3.1 Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$; soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.

On dit qu'elle est analytique sur U si, pour tout $b \in U$, la fonction

$$f_b : h \to f(b+h)$$

est développable en série entière sur un voisinage de zéro.

Exemples

- Les fonctions polynomiales sont analytiques sur $\mathbb{C}$.
- exp est analytique sur $\mathbb{C}$.
- $z \to \frac{1}{1-z}$ est analytique sur $U = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- On va voir que la somme d'une série entière est analytique sur $U = D(0, R)$.
- La fonction ζ se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbb{C} - \{1\}$.
- La fonction Γ se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ privé des entiers négatifs.

5.3.2 ζ est analytique sur $]1, +\infty[$

Démonstration

On fixe $a > 1$. On étudie $\zeta(a+h)$;

$$\forall h > 1-a, \zeta(a+h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+h}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} . \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-h)^k}{k!} . (\ln n)^k$$

On souhaite permuter. On pose

$$u_{n,k} = \frac{1}{n^a} . \frac{(-h)^k}{k!} . (\ln n)^k , \; v_{n,k} = |u_{n,k}|$$

On pose

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k} = \frac{n^{|h|}}{n^a} = \frac{1}{n^{a-|h|}}$$

La série $\sum s_n$ converge si et seulement si $|h| < a-1$, et dans ce cas on peut permuter les sommes.

Conclusion :

$$|h| < R = a-1 \Longrightarrow \zeta(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k$$

avec

$$a_k = \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^a} . (\ln n)^k$$

Bien entendu, on retrouve la série de Taylor de ζ au point a.

5.3.3 La somme d'une série entière est analytique

Soit f la somme d'une série entière sur $U = D(0, R)$.

Alors f est analytique sur U.

Démonstration

$$\forall z \in U, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Fixons $b \in U$; notons $r = R - |b|$.
Soit h tel que $|h| < r$.

$$f(b+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (b+h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) b^{n-k}.h^k$$

Soit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left| a_n.b^{n-k}.h^k \right| \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = |a_n| \left(|b| + |h| \right)^n$$

$\sum s_n$ converge, car

$$|b| + |h| < R = R_a = R_{|a|}$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$f(b+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n. \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) b^{n-k}.h^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.z^k$$

avec

$$c_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n. \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) b^{n-k} = \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).a_n.b^{n-k}$$

Remarque

Dans le cas où b est réel, on trouve que

$$c_k = \frac{1}{k!}.f^{(k)}(b) = \frac{1}{k!}.f_b^{(k)}(0)$$

Etait-ce prévisible ?

5.4 Les zéros

5.4.1 Un zéro isolé

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ définie sur $U = D(0,R)$; on suppose $f(0) = 0$.
Alors 0 est un zéro isolé, sauf si f est nulle.

Démonstration

Supposons f non nulle. Soit

$$p = \min \{ n \in \mathbb{N} / \, a_n \neq 0 \}$$

On peut écrire :

$$\forall z \in U, \; f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n = z^p. \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} z^n = z^p.g(z)$$

où g est la somme d'une série entière de rayon 1, donc continue en 0, telle que

$$g(0) = a_p \neq 0$$

5.4.2 Généralisation

Soit f analytique sur U ouvert de $\mathbb{C}$ connexe par arcs.
Alors les zéros de f sont isolés, sauf si f est nulle.

Démonstration

On montre que l'intérieur de l'ensemble des zéros est ouvert et fermé dans U.

5.5 Inverse, méthode 1

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; on suppose $a_0 = 1$ et $R_a > 0$.

On définit (b_n) par $b_0 = 1$, et si $n \geq 1$:

$$b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k$$

Il est nécessaire de vérifier que $R_b > 0$.

On sait qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 0,\ |a_n| \leq C^n$$

D'où

$$\forall n \geq 1,\ |b_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| C^{n-k}$$

Notons $d_k = \frac{|b_k|}{C^k}$:

$$\forall n \geq 1,\ d_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} d_k$$

Notons $s_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$:

$$\forall n \geq 1,\ s_n \leq 2.s_{n-1}$$

On obtient enfin :

$$\forall n \geq 1, |b_n| = d_n C^n \leq s_{n-1} C^n \leq 2^{n-1} C^n$$

Conclusion ?

$$R_b \geq \frac{1}{2C}$$

5.6 Un lemme sur le produit

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$; soit $R = \min(R_a, R_b)$.

On suppose $R > 0$; soit

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x) g(x)$$

On note :

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n,\ g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| x^n,\ h_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n$$

Alors, les coefficients de $f_1.g_1$ majorent ceux de h_1, et

$$\forall x \in [0, R[, 0 \leq h_1(x) \leq f_1(x) g_1(x)$$

Démonstration

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |c_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| . |b_{n-k}|$$

5.7 Inverse, méthode 2

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; on suppose $a_0 = 1$ et $R_a > 0$; $f(x) = 1 - h(x)$ avec

$$h(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{p=0}^{\infty} (h(x))^p$$

à condition que $|h(x)| < 1$; $(h(x))^p = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p) x^n$.

Donc, si $|h(x)| < 1$:

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p) x^n$$

Il reste à intervertir...

Posons $h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| x^n$; $(h_1(x))^p = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(p) x^n$.

Que dire de $d_n(p)$?

$$|c_n(p)| \leq d_n(p)$$

Fixons $r > 0$ tel que $0 < h_1(r) < 1$...

5.8 Généralisation : la composition

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$; on suppose $a_0 = 0$, $R_a > 0$, et $R_b > 0$.

On veut montrer que $g \circ f$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

Démonstration

On pose

$$(f(x))^p = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(p) x^n$$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| x^n,\ (f_1(x))^p = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(p) x^n$$

A nouveau :

$$\forall p \geq 1, \forall n \geq 1, |c_n(p)| \leq d_n(p)$$

Fixons $r > 0$ tel que $0 < r < R_a$ et $0 < f_1(r) < R_b$.

Soit x tel que $|x| \leq r$:

$$g \circ f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p) x^n$$

On note $u_{n,p} = b_p.c_n(p).x^n$; $|u_{n,p}| \leq v_{n,p} = |b_p|.d_n(p).r^p$; d'où

$$s_p = \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,p}| \leq |b_p| (f_1(r))^p$$

D'où $\sum s_p$ converge.

On peut donc intervertir :

$$g \circ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{p=0}^{\infty} b_p.c_n(p)$$

5.9 Localisation des racines d'un polynôme dans $\mathbb{C}$.

5.9.1 Intégrale curviligne

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$. Soit C le cercle de centre a et de rayon r. On paramètre C par :

$$\gamma : t \to a + r.e^{it}$$

Soit $f \in C^0(C, \mathbb{C})$. On note

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f \circ \gamma.\gamma' = \int_0^{2\pi} f\left(a + r.e^{it}\right) ire^{it}\mathrm{d}t$$

5.9.2 Un calcul d'intégrale curviligne

Soit $b \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b}$$

Réponse

On trouve 1 si $|b-a| < r$, 0 si $|b-a| > r$.

Cas où $|b-a| < r$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{a+re^{it}-b}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-\frac{b-a}{r}e^{-it}}$$

Donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b-a}{r}\right)^n e^{-int}\mathrm{d}t$$

Cas où $|b-a| > r$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{a+re^{it}-b}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}.\frac{r}{a-b}.\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}\mathrm{d}t}{1-\frac{r}{b-a}e^{it}}$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b} = \frac{1}{2\pi}.\frac{r}{a-b}.\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{b-a}\right)^n e^{i(n+1)t}\mathrm{d}t$$

5.9.3 Application aux racines des polynômes

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ n'ayant pas de racines sur le cercle γ. Que dire de

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\mathrm{d}z$$

C'est le nombre de racines de P dans le disque. On peut en déduire que

- L'ensemble U des polynômes de degré n ($n \geq 1$), scindés à racines simples, est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$.

- Si P_0 est dans U, si P est suffisamment proche de P_0, alors les racines de P sont proches de celles de P_0.