Algèbre linéaire 2

1 Soit $A, B \in M_n(\mathrm{K})$, $M = \begin{bmatrix} A & A \\ A & B \end{bmatrix}$. Déterminer rg M, et M^{-1} si elle existe, en fonction de A et B.

2 On suppose que $f+g = Id$, et rg f + rg $g \leq$ dim E. Montrer que f et g sont des projecteurs.

3 Soit $A \in GL_n(\mathrm{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathrm{K})$ extraite de A. Montrer que rg $B \geq p+q-n$.

4 Soit p un projecteur. Montrer que les SEV stables par p sont les sommes $F + G$, où F est un SEV de Ker p et G un SEV de Im p.

5 Soit A un élément de $M_2(\mathrm{K})$. Montrer que la dimension du commutant de A est 2 ou 4.

6 Soit $u, v \in L(E)$. Montrer que u et v sont deux projecteurs de même noyau SSI $uv = u$ et $vu = v$.

7 Soit $u, v \in L(E)$. Montrer que Ker $u \subset$ Ker $v \circ u$, et Ker u = Ker $v \circ u$ SSI Im $u \cap$ Ker $v = \{0\}$.
Montrer que $u(\text{Ker } v \circ u) =$ Ker $v \cap$ Im u.

8 Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ (A, B, C, D matrices carrées) ; on suppose que $AC = CA$; montrer que $\det M = \det(AD-CB)$. (on pourra commencer par le cas où A est inversible).

9 Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que : $\lambda AB + A + B = 0$. Montrer que $AB = BA$.

10 Soit E un K-EV de dimension finie n, et $f \in L(E)$. Montrer que Ker f = Im f SSI $f^2 = 0$ et $n = 2.rg(f)$.

11 Soit A et $B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A+\lambda B$ est nilpotente pour $n+1$ réels λ, A et B sont nilpotentes.

12 Soit E un K-EV de dimension finie, u et v deux éléments de $L(E)$ tels que $u+v = u \circ v$.
Montrer que rg u = rg v. (Comparer images et noyaux).

13 Soit p un projecteur. Soit $u \in L(E)$. Montrer que $up = pu$ SSI Ker p et Im p sont stables par u.

14 Soit $p \in L(E)$ tel que rg p = 1 et tr p = 1 ; montrer que p est un projecteur.

15 Résoudre dans $M_n(\mathrm{K})$: $X + {}^tX = \mathrm{tr}(X)\, A$.

16 Soit $f \in M_n(\mathrm{K})^*$ telle que : $\forall\, X, Y$, $f(XY) = f(YX)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace. (Utiliser la base canonique de $M_n(\mathrm{K})$).

17 Soient p et q deux projecteurs. Montrer que Im p = Im q SSI $pq - qp = q - p$.

18 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si i divise j, 0 sinon ; $\det(A)$?

19 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall\, i, j$ $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$. Montrer que 2^{n-1} divise $\det(A)$.

20 Soit $n \geq 2$, $P_n = X^n - X + 1$. Nombre de racines dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$? On les note (b_i).
On pose $a_{i,i} = 1 + b_i$, $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$. $\det(a_{i,j})$? On trouve $2(-1)^n$.

21 Montrer que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est un projecteur, et que M_2(K), M_n(K) ont une base constituée de projecteurs.

22 Soit A et B éléments de $M_n(\mathbb{Z})$. On suppose que det(A)$\wedge$det(B) = 1. En utilisant les comatrices, montrer l'existence de U, V éléments de $M_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = UA + VB = I_n$.

23 Soit E un K-EV de dimension finie, F et G deux SEV de E. Montrer qu' il existe u dans $L(E)$ tel que F = Ker u et G = Im u SSI dim F + dim G = dim E.

24 Soit u un élément de $L(E)$ de rang 1. Montrer l'existence de a élément de E, et f élément de E* tels que : $\forall\, x \in E,\ u(x) = f(x)a$. Si E est de dimension finie, exprimer tr u à l'aide de a et f.

25 $a_{i,j} = a$ si $i = j$, b sinon. $\det(A)$? $b_{i,j} = |i - j|$. $\det(B)$? On trouve $(n-1)(-1)^{n-1}2^{n-2}$.

26 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = b_{\min(i,j)}$ où $b_1,\ldots b_n$ sont des réels. $\det(A)$?

27 Exprimer à l'aide de la fonction sinus le déterminant de la matrice tridiagonale $\begin{bmatrix} 2\cos\varphi & 1 & & & \\ 1 & . & . & & \\ & . & . & . & \\ & & . & . & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\varphi \end{bmatrix}$.

28 Soit n impair, $A \in M_n(\mathbb{Z})$ symétrique, à coefficients diagonaux pairs. Montrer que $\det(A)$ est pair.

29 $a_{i,j} = \cos(j-1)b_i$. Calculer $\det(A)$ à l'aide des polynômes de Tchebytchev.

30 Soit A, $B \in M_{n,1}$(K). Montrer que $\det(I_n + A\,{}^tB) = 1 + {}^tAB$.

31 Déterminer les SEV stables par $E_{2,1} + \ldots + E_{n,n-1} = M \in M_n$(K).