

## Diagonalisation

1 Soit  $u \in L(E)$  diagonalisable,  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Montrer que  $\lambda u$ ,  $u^2$ ,  $P(u)$ ,  $u^{-1}$  s'il existe le sont.

2  $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} & & & a_n \\ & & & \\ & & & \\ a_1 & a_2 & & \end{bmatrix}$  sont-elles diagonalisables dans  $M_n(\mathbb{R})$ , dans  $M_n(\mathbb{C})$  ?

3  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$  est-elle diagonalisable ? Résoudre dans  $M_2(\mathbb{R})$  :  $X^3 - 2X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ .

4  $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  est-elle diagonalisable ? Si oui, exprimer  $A^n$  en fonction de  $A$  et  $I_4$ .

5 Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  diagonalisable ;  $B = {}^t A$  est-elle diagonalisable ? Même question avec trigonalisable.

6 Soit  $u \in L(E)$  diagonalisable. Montrer que  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont supplémentaires.

7 Donner deux matrices diagonalisables dans  $M_2(\mathbb{R})$  dont le produit ne l'est pas.

8 Dans un EV de dimension finie, montrer qu'un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable SSI son image n'est pas contenue dans son noyau.

9 Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -EV de dimension finie  $n$ ,  $q \geq 1$  et  $T \in L(E)$  tel que  $T^q = \text{Id}$ . Montrer que  $T$  est diagonalisable. Même question si :  $\forall x \in E, \exists q \geq 1, T^q(x) = x$ . Etudier le cas où  $E$  n'est pas de dimension finie.

10 Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $M^n = I_n$  ;  $M$  est-elle diagonalisable ? Déterminer toutes les matrices  $M \in M_n(\mathbb{C})$  telles que  $M^n = I_n$  et  $\text{tr } M = n$ .

11 Soit  $M = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & -b & 0 \end{bmatrix}$ . Est-elle diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$ , dans  $M_n(\mathbb{C})$  ?

12  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $u \in L(E)$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable SSI  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{rg}(u - \lambda \text{Id}) = \text{rg}(u - \lambda \text{Id})^2$ .

13 Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$  ; on suppose  $M^2$  diagonalisable ; trouver une CNS simple pour que  $M$  soit diagonalisable.

14 Soit  $A \in M_p(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_q(\mathbb{K})$  diagonalisables, et  $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$  ; on suppose que  $\text{Sp } A \cap \text{Sp } B = \emptyset$ . Montrer que  $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$  est diagonalisable.

15 Soit  $n = \dim E$ ,  $f \in L(E)$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable SSI il existe  $n$  hyperplans stables par  $f$  d'intersection nulle.

16  $A = \begin{bmatrix} 13 & -9 & 45 \\ -3 & 3 & -11 \\ -3 & 2 & -10 \end{bmatrix}$  est-elle diagonalisable ? Trouver  $a, b, c$  réels,  $P$  tels que  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ .