Intégration

1 $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+|x|} f(x-n)\,\mathrm{d}x$

Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ intégrable. Soit

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+|x|} f(x-n)\,\mathrm{d}x$$

Etudier la convergence de (I_n).

2 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^x}}$

Déterminer l'ensemble de définition puis calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^x}}$.

Indications

$$t = u^{\frac{1}{x}}$$

On trouve :

$$\forall x > 0, \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^x}} = \frac{2.\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{x}$$

3 $\int_{-\infty}^{\infty} f_n.g$

On définit f_n par $f_n(x) = 0$ si $|x| \geq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = n - n^2|x|$ si $|x| \leq \frac{1}{n}$; étudier la convergence simple et uniforme de (f_n).

Soit g continue sur $\mathbb{R}$; trouver la limite de la suite de terme général

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n.g$$

Indications

(f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^*$, mais non uniformément.

On décompose g en

$$g = g(0) + h$$

avec $h = g - g(0)$; évidemment, $h(0) = 0$. Soit

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n.h$$

Notons $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ et

$$M_n = \sup_{A_n} |h|$$

Alors :

$$\forall n \geq 1, |J_n| = \left|\int_{A_n} f_n.h\right| \leq \int_{A_n} |f_n.h| \leq M_n. \int_{A_n} |f_n| = M_n$$

Or la continuité de h au point 0 permet de montrer que (M_n) tend vers 0 ; donc (J_n) tend vers 0 ; or

$$\forall n \geq 1, I_n = J_n + g(0)$$

Conclusion :

$$\lim_n I_n = g(0)$$

4 $\int_0^1 g = \frac{g(0)+g(1)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,(1-t)\,g''\,(t)\,\mathrm{d}t$

Soit $g \in C^2\left([0,1], \mathbb{R}\right)$; montrer que

$$\int_0^1 g = \frac{g\,(0)+g\,(1)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,(1-t)\,g''\,(t)\,\mathrm{d}t$$

Indications

Une intégration par parties rusée :

$$\int_0^1 g = \left[\left(t-\frac{1}{2}\right)g\,(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)g'\,(t)$$

puis une deuxième intégration par parties.

5 $\int_{\mathbb{R}} f.f'' \leq 0$

Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose f^2, $f.f''$ et f'^2 intégrables.

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f.f'' \leq 0$$

Indications

Par intégration par parties :

$$\forall x>0, \int_0^x f.f'' = (ff')\,(x) - (ff')\,(0) - \int_0^x (f')^2$$

Quand $x \to +\infty$, $(f.f')\,(x)$ a donc une limite finie a.

Cette limite est forcément nulle, car sinon f^2 tendrait vers $+\infty$ et ne serait pas intégrable. On peut donc passer à la limite :

$$\int_0^{+\infty} f.f'' = -\,(ff')\,(0) - \int_0^{+\infty} (f')^2$$

On fait une étude analogue sur $]-\infty, 0]$ et on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f.f'' = -\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2 \leq 0$$

6 $\int_{-1}^1 e^{-\lambda\left(x^2+x^4\right)}\mathrm{d}x$

Soit $I\,(\lambda) = \int_{-1}^1 e^{-\lambda\left(x^2+x^4\right)}\mathrm{d}x$; trouver un équivalent de $I\,(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Indications

Changement de variable $x = \frac{u}{\sqrt{\lambda}}$, puis théorème de convergence dominée ; on trouve

$$I\,(\lambda) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\lambda}}$$

7 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin nx|}{\sin x}\mathrm{d}x$

Soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin nx|}{\sin x}\mathrm{d}x$$

Trouver la limite puis un équivalent de I_n.

Indications

On introduit

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin nx|}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{u} \mathrm{d}u$$

On constate que :

$$\forall n \geq 1, I_n \geq J_n$$

Notons

$$u_k = \int_{(k-1)\frac{\pi}{2}}^{k\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{u} \mathrm{d}u$$

$$\forall k \geq 2, \frac{2}{k\pi} \leq u_k \leq \frac{2}{(k-1)\pi}$$

Donc :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi} \leq J_n \leq u_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi}$$

On en déduit que

$$J_n \sim \frac{2}{\pi}.\ln n$$

On montre ensuite que $(I_n - J_n)$ est bornée ; conclusion :

$$I_n \sim \frac{2}{\pi}.\ln n$$

8 $\int_0^1 \left(3x^2 - 2x^3\right)^n \mathrm{d}x$

Soit

$$I_n = \int_0^1 \left(3x^2 - 2x^3\right)^n \mathrm{d}x$$

Trouver la limite de I_n, puis montrer que

$$I_n \sim \frac{A}{\sqrt{n}}$$

avec $A = \int_0^\infty \exp\left(-3t^2\right) \mathrm{d}t$

Indications

Pour la limite, on peut utiliser le théorème de convergence dominée.

Ensuite, changements de variable $x = 1 - u$, puis $u = \frac{v}{\sqrt{n}}$:

$$\sqrt{n}.I_n = J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{3}{n}v^2 + \frac{2}{n\sqrt{n}}v^3\right)^n \mathrm{d}v$$

A nouveau le théorème de convergence dominée ; on remarque que

$$\forall u \in [0,1], \; 1 - 3u^2 + 2u^3 \leq 1 - u^2$$

On en déduit qu'on peut dominer par $\varphi(v) = e^{-v^2}$.

9 Sommes et intégrales

1- Soit $g \in C^1([a,b], \mathbb{R})$. On note

$$M_1 = \|g'\|_\infty$$

On suppose que $g(a) = g(b) = 0$. Montrer que

$$\left|\int_a^b g\right| \leq M_1.\frac{(b-a)^2}{4}$$

2- Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$. On note

$$r_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Soit $I = \int_0^1 f$. Trouver la limite L de $n(r_n - I)$.

Indications

On va montrer que $L = \frac{f(0)+f(1)}{2}$.

Notons

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\left(f\left(0\right) + f\left(1\right)\right)$$

On doit montrer que $n\left(t_n - I\right)$ tend vers 0.

n et k étant fixés, on appelle φ la fonction affine qui coïncide avec f en $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$, et

$$g = f - \varphi$$