Vecteurs propres communs

1 $u \circ v = \alpha u + \beta v$

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit u et v deux endomorphismes de E. Soit α et β deux scalaires. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun dans chacun des cas suivants :

1- $u \circ v = 0$.

2- $u \circ v = \alpha u$

3- $u \circ v = \alpha u + \beta v$

Indications

1- Si $v = 0$, c'est facile. Sinon remarquer que

$$\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

et utiliser v', endomorphisme induit par v sur $\operatorname{Im} v$.

2-

$$u \circ (v - \alpha \mathrm{Id}) = 0$$

donc u et $v - \alpha\mathrm{Id}$ ont un vecteur propre commun.

3- On suppose α etβ non nuls.

$$(u - \beta\mathrm{Id}) \circ (v - \alpha\mathrm{Id}) = \alpha\beta\mathrm{Id}$$

Il suffit de montrer que si $w \in GL(E)$, w et w^{-1} ont un vecteur propre commun.

2 $u \circ v - v \circ u = \alpha u + \beta v$

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit u et v deux endomorphismes de E. Soit α et β deux scalaires.

1- On suppose que $u \circ v - v \circ u = 0$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

2- On suppose que $u \circ v - v \circ u = \beta v$, avec β non nul. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

3- On suppose que $u \circ v - v \circ u = \alpha u + \beta v$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Indications

1- Soit F un sous-espace propre de u. F est stable par v. L'endomorphisme v' induit par v sur F possède au moins un vecteur propre.

2- Soit $F = \operatorname{Ker} v$. On vérifie que F est stable par u.

De plus, $F \neq \{0\}$, car sinon :

$$v^{-1} \circ u \circ v - u = \beta\mathrm{Id}$$

3-

$$u \circ \left(v + \frac{\alpha}{\beta}u\right) - \left(v + \frac{\alpha}{\beta}u\right) \circ u = \beta\left(v + \frac{\alpha}{\beta}u\right)$$

3 $u \circ v = v \circ u$

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit u et v deux endomorphismes de E.

1- On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

2- Généraliser à une famille (u_i) d'endomorphismes qui commutent.

Indications

2- Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

On utilise un sous-espace propre F d'un des u_i qui n'est pas une homothétie :

$$u_i \notin K.\mathrm{Id},\ F \neq E,\ F \neq \{0\}$$

et on applique l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes induits sur F.