Algèbre linéaire 3

1 Montrer sans calculs que toute matrice A de $M_2(\mathbb{C})$ vérifie : tr A^2 – (tr A)² + 2 det A = 0.

2 Soit $E = \mathbb{R}[X]$, L défini par $L(P) = XP'-P$. Montrer que $L \in L(E)$; montrer que les SEV $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ sont stables par L ; étudier la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme induit L_n ; quels sont les éléments propres de L ?

3 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer A^n et B^n pour n entier naturel.

4 Montrer que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont semblables. Trouver $\lim_n \frac{1}{n}A^n$.

5 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$, tr $A^k = 0$. A l'aide du th de C-H, montrer que det A = 0, puis montrer que $A^n = 0$. (Récurrence sur n).

6 Soit $z \in \mathbb{C}-\{1\}$, $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} z & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont semblables.

Soit $f : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ un morphisme mutiplicatif tel que : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $f\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = z$. Montrer que f = det.

7 Soit M une matrice compagnon ; montrer que M et sa transposée sont semblables.

8 Chercher les SEV de $\mathbb{R}^3$ stables par $M = \begin{bmatrix} -1 & k & -k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

9 Soit E le $\mathbb{R}$-EV des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ ayant une limite finie en $+\infty$; on pose $(u(f))(x) = f(x+1)$; éléments propres de u ?

10 Soit A et $B \in M_n(\mathbb{C})$; montrer l'existence de $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que AX et BX soient colinéaires, puis l'existence de P et Q inversibles telles PAQ et PBQ soient triangulaires supérieures.

11 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et A^{-1} sont à coefficients positifs SSI A est à coefficients positifs et n'a qu'un coefficient non nul par ligne et par colonne.

12 Soit $E = C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Montrer qu'on peut définir un endomorphisme de E par : $u(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.
Eléments propres de u ?

13 Soit $E = M_n(K)$, $A, B \in E$, $u : X \to AX$, $v : X \to AXB$, $w : M \to {}^tM$; traces, det, de u, v, w ?

14 Soit A l'élément de $M_{2n+1}(\mathbb{R})$ défini par $a_{i,j} = 1$ si $i = 1$ ou $j = 1$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Montrer que Sp A est contenu dans $\mathbb{Z}$ SSI $8n+1$ est un carré parfait.

15 Soit $E = M_n(K)$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ distincts, $A = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. On note $u(X) = AX - XA$. Montrer que $u \in L(E)$. Ker u, Im u ? Soit $M \in E$ de trace nulle. Montrer que : $\exists\, X, Y \in E$, $M = XY - YX$.
(On pourra montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle).

16 Soit $D = \sum_{i=1}^{n} i\, E_{i,i}$. Nombre de matrices semblables à D commutant avec D ?

17 Soit $M \in M_2(\mathbb{R}) - \{0\}$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pour un unique b.

18 Soit E un $\mathbb{C}$-EV de dimension finie, u et $v \in L(E)$, $w = u \circ v - v \circ u$. On suppose que u et v commutent avec w. Montrer que w est nilpotent et que les 3 sont simultanément trigonalisables.

19 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^t comA \in \mathbb{R}[A]$ par densité en commençant par le cas où A est inversible.

20 Soit $a_1,...,a_n \in \mathbb{C}$, et $P_q = \prod_{j=1}^{n} (X - a_j{}^q)$. Montrer que si $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$, alors : $\forall\, q \in \mathbb{N}^*, P_q \in \mathbb{Z}[X]$.

21 Montrer que K = $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{bmatrix} \;/\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

22 Soit A et B éléments de $M_n(\mathbb{R})$ tels que $\lim_{k} A^k = B$; montrer que B est un projecteur et que $(A - I_n)B = B(A - I_n) = 0$; décrire B.

23 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$; on définit A par $a_{i,i+1} = i,\ a_{j+1,j} = n+1-j$, 0 sinon ; trouver un endomorphisme de E dont la matrice est A et en déduire les éléments propres de A.

24 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 2$ si $i = j$, -1 si $|i - j| = 1$, 0 sinon. Soit X un vecteur colonne tel que $AX \geq 0$. Montrer que $X \geq 0$. (C'est-à-dire à composantes toutes positives).

25 Soit E un $\mathbb{R}$-EV de dimension 3, B une base de E, f un élément de $L(E)$.
On note $F(v) = \mathrm{Vect}\{ f^k(v) \;/\; k \in \mathbb{N}\}$.
Trouver les $v \in E$ tels que $F(v) \neq E$ si $M_B(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

26 Montrer que $GL_2(\mathbb{Q})$ ne possède pas d'élément d'ordre 5.

27 Soit A et $B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que : $\exists\, k_0, \forall\, k \geq k_0$, $\mathrm{tr}\, A^k = \mathrm{tr}\, B^k$; montrer que c'est vrai pour tout $k \geq 0$.

28 Soit $E = M_n(\mathbb{C})$; soit $A \in E$, non inversible ; montrer l'existence de B telle que $B - \lambda A$ soit inversible pour tout complexe λ . Soit $\varphi \in L(E)$ tel que l'image de toute matrice inversible est inversible ; montrer que l'image de toute matrice non inversible est non inversible.