Dimension quelconque

1 $\left(X^2+X\right).P\left(1\right)+\left(X^2-X\right).P\left(-1\right)$

Soit $E=\mathbb{C}\left[X\right]$ et

$$f:P\rightarrow\left(X^2+X\right).P\left(1\right)+\left(X^2-X\right).P\left(-1\right)$$

Montrer que f est un endomorphisme et déterminer son noyau, son image, ses valeurs propres et ses valeurs propres.

Réponse

On montre que $f\left(P\right)=0$ si et seulement si $P\left(1\right)=P\left(-1\right)=0$. Donc

$$\ker f=\left(X^2-1\right)\mathbb{C}\left[X\right]$$

On trouve aisément que $\mathrm{Im}f=\mathrm{Vect}\left(X,X^2\right)$.

Ensuite, soit $F=\mathbb{C}_2\left[X\right]$; F est stable par f ; matrice de l'endomorphisme f_1 de F induit par f dans la base canonique :

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$

On en déduit que M est diagonalisable ; spectre : $\left(0,2,2\right)$.

2 $\left(2X+1\right).P-\left(X^2-1\right).P'$

Soit $E=\mathbb{R}\left[X\right]$ et

$$u:P\rightarrow\left(2X+1\right).P-\left(X^2-1\right).P'$$

Montrer que u est un endomorphisme et déterminer ses valeurs propres.

Réponse

Soit P soit un vecteur propre, qu'on peut supposer unitaire ; nécessairement, $\deg u\left(P\right)\leq\deg P$; soit $n=\deg P$; le coefficient de degré $n+1$ de $u\left(P\right)$ est $2-n$; donc, nécessairement, $n=2$.

Soit $F=\mathbb{R}_2\left[X\right]$; on remarque que F est stable par u ; soit v l'endomorphisme de F induit par u ; dans la base canonique de F, la matrice de v est :

$$M=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont les racines de $\chi_M=\left(X-1\right)\left(X+1\right)\left(X-3\right)$: $\{3,1,-1\}$.

Autre méthode

Soit P soit un vecteur propre, qu'on peut supposer unitaire ; $\left(2X+1\right).P-\left(X^2-1\right).P'=\lambda.P$; donc :

$$\frac{P'}{P}=\frac{2X+1-\lambda}{X^2-1}$$

Après décomposition :

$$\frac{P'}{P}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}$$

avec $a=\frac{3-\lambda}{2}$ et $b=\frac{1+\lambda}{2}$; or, on sait que si

$$P=\prod_{j=1}^{n}\left(X-c_j\right)$$

alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{X - c_j}$$

Donc a et b sont des entiers naturels ; le degré de P est $a+b$, donc 2 ; seules possibilités : $\lambda \in \{3, 1, -1\}$. Cette méthode permet aussi de calculer facilement les vecteurs propres.

3 $\int_0^\infty e^{-t}.P\left(x+t\right)\mathrm{d}t$

$E = \mathbb{R}\left[X\right]$; on note D l'endomorphisme de dérivation ; on définit $L \in L\left(E\right)$ par

$$L\left(P\right)\left(x\right) = \int_0^\infty e^{-t}.P\left(x+t\right)\mathrm{d}t$$

1- Vérifier que $L \in L\left(E\right)$.
2- Trouver une suite $\left(a_n\right)$ telle que

$$\forall P \in E,\ L\left(P\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n\left(P\right)$$

3- Montrer l'unicité de $\left(a_n\right)$.
4- Chercher les éléments propres de L.
5- Décrire les endomorphismes U commutant avec L.

Réponse

2- Intégration par parties. $\forall n \geq 0,\ a_n = 1$.
4- A l'aide de 2 : 1 est la seule valeur propre, $E_1\left(L\right) = \mathbb{R}_0\left[X\right]$.
5- $D = I - L^{-1}$; les endomorphismes commutant avec L sont ceux qui commutent avec D ; on montre que

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n$$

4 Commutant de D

Soit $E = \mathbb{R}\left[X\right]$ et $D : P \to P'$; soit $u \in L\left(E\right)$ commutant avec D ; montrer qu'on peut exprimer u sous la forme

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$$

Indications

On fixe $n \geq 1$ et on note $E_n = \mathbb{R}_n\left[X\right]$ et $P_n = \frac{X^n}{n!}$.
1- Montrer que E_n est stable par u.
2- Montrer qu'on peut écrire

$$u\left(P_n\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k.D^k P_n$$

Montrer l'unicité des a_k. Montrer que

$$u\left(P_{n-1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k.D^k P_{n-1}$$

3- Conclure.

5 Bases dans $\mathbb{R}\left[X\right]$

Montrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}\left[X\right]$ différent de $\{0\}$ possède une base finie ou dénombrable.

6 Ker $(g \circ f)$

Soient $f, g \in L(E)$; on suppose Ker$f$ et Ker$g$ de dimensions finies.

Montrer que Ker $(g \circ f)$ est de dimension finie.

7 Codimension finie

On suppose $E = F + G$, et G de dimension finie.

Montrer que F possède dans E un supplémentaire de dimension finie.

8 $f(x, .)$ et $f(., y)$

Soit f une fonction de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$. On note $g_a : x \to f(a, x)$, $h_b : x \to f(x, b)$.

1- Donner des exemples où la famille $(g_a)_{a \in X}$ est de rang fini.

2-Montrer que les deux familles $(g_a)_{a \in X}$ et $(h_b)_{b \in Y}$ ont le même rang, fini ou non.

9 Un opérateur intégral

Soit $S = [0, 1]$, $E = \left(C^0(S, \mathbb{R}), \|\|_\infty\right)$. Soit $K \in C^0\left(S^2, \mathbb{R}\right)$.

On définit T par

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) \, \mathrm{d}t$$

1- Montrer que $T \in L_C(E)$.

2- Soit $I \in L(E, E^*)$ défini par

$$I(f)(g) = \int_0^1 fg = \langle f, g \rangle$$

Montrer que I est injectif.

3- CNS sur K pour que T soit de rang fini ?

Indications

3- I étant injectif, T est de rang fini si et seulement si $I \circ T$ est de rang fini. On utilise l'exercice précédent.