Matrices

1 Concaténation

Soit $A \in M_{p,n}(K)$ et $B \in M_{p,m}(K)$; soit $C = [A, B] \in M_{p,n+m}(K)$ obtenue en concaténant les deux.

Montrer que $\text{rg}C \leq \text{rg}A + \text{rg}B$; cas d'égalité ?

Indications

Notons $E = M_{p,1}(K)$, F le sous-espace de E engendré par les colonnes de A, et G le sous-espace de E engendré par les colonnes de B. On remarque que le sous-espace de E engendré par les colonnes de C est $F + G$.

Or : $\text{rg}A = \dim F$ et $\text{rg}B = \dim G$; donc

$$\text{rg}C = \dim(F + G) \leq \dim F + \dim G = \text{rg}A + \text{rg}B$$

Cas d'égalité : c'est le cas où $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$, c'est-à-dire F et G en somme directe.

2 Déterminants par blocs

Soit A, B éléments de $M_n(\mathbb{R})$; soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$.

Montrer que $\det M = \det(A - B).\det(A + B)$ et que $\det N = \det(A + iB).\det(A - iB) \geq 0$.

Indications

Par opérations sur les lignes, puis sur les colonnes :

$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ B - A & A - B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A + B & B \\ 0 & A - B \end{bmatrix} = \det(A - B).\det(A + B)$. De même :

$\det \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ iA - B & A + iB \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A - iB & B \\ 0 & A + iB \end{bmatrix} = \det(A + iB).\det(A - iB)$.

Lemme

Pour toute matrice $C \in M_n(\mathbb{C})$, $\det\overline{C} = \overline{\det C}$: d'après la formule du déterminant (somme de produits de termes).

Il en découle que $\det(A + iB)$ et $\det(A - iB)$ sont conjugués ; d'où

$$\det N \geq 0$$

3 Damiers

On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est à damiers si $a_{i,j} = 0$ dès que $i + j$ est impair.

Si A est à damiers et inversible, A^{-1} est-elle à damiers ?

Indications

Notons $(e_1, e_2, ...e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$; soit F le sous-espace de E engendré par les e_i pour i pair et G le sous-espace de E engendré par les e_i pour i impair ; A est à damiers si et seulement si F et G sont stables par A ; dans ce cas, ils sont aussi stables par A^{-1} ; donc A^{-1} est aussi à damiers.

4 Presque non inversible

Soit $A \in GL_n(K)$; montrer qu'on peut rendre A non inversible en changeant un seul coefficient.

Indications

Il faut d'abord justifier que A possède au moins un cofacteur $C_{i,j}$ non nul ; posons alors

$$A_t = A + t.E_{i,j}$$

En développant par rapport à la ligne i :

$$\det A_t = \det A + t\,(-1)^{i+j}\,.C_{i,j}$$

Il suffit de choisir $t =$?

5 Trace dans $M_2(K)$

Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension 2, et $u \in L(E) \setminus K.\mathrm{Id}$ de trace t ; soit t_1 et t_2 deux scalaires tels que

$$t = t_1 + t_2$$

Montrer qu'il existe une base B de E telle que la diagonale de $M_B(u)$ soit (t_1, t_2).

Indications

u n'étant pas une homothétie, on sait qu'il existe un vecteur e_1 qui n'est pas vecteur propre de u ; notons $e_2 = u(e_1)$; alors $B = (e_1, e_2)$ est libre. On en déduit facilement que

$$B' = (e_1, e_2 - t_1.e_1) = (e_1, e_2')$$

est libre. De plus :

$$u(e_1) = e_2 = t_1.e_1 + (e_2 - t_1.e_1)$$

Sachant que la trace ne dépend pas de la base, on vérifie aisément que B' convient :

$$M_{B'}(u) = \begin{bmatrix} t_1 & * \\ 1 & t_2 \end{bmatrix}$$

6 Points d'interpolation

Soit X un ensemble, $(f_1, ..., f_n)$ libre dans K^X.

Montrer l'existence de n points de X, $x_1, ..., x_n$ tels que

$$\det\left(f_i(x_j)\right)_{1 \le i,j \le n} \neq 0$$

7 Nombre fini de sous-espaces stables

Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & . & 0 \\ & 0 & 1 & & . \\ & & . & . & \\ . & & & & 1 \\ 0 & . & & & 0 \end{bmatrix} \in M_n(K)$; trouver $n+1$ sous-espaces stables par M, puis montrer que ce sont les seuls.

Indications

Notons $(e_1, e_2, ...e_n)$ la base canonique de $E = K^n$; on identifie M et l'endomorphisme canoniquement associé m ; soit E_k le sous-espace de E de base $(e_1, e_2, ...e_k)$; on constate que pour $0 \le k \le n$, E_k est stable par M, et que

$$E_k = \ker u^k$$

Soit maintenant F un sous-espace de E stable par M ; soit k sa dimension ; soit v l'endomorphisme de F induit par m ; v est nilpotent, et on sait que son indice de nilpotence est majoré par la dimension, k ; donc

$$v^k = 0$$

Ceci signifie que $F \subset \ker u^k$; les deux étant de dimension k :

$$F = E_k$$

8 Des tas de cailloux

On s'intéresse à des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$, à diagonale nulle, dont les autres coefficients sont ± 1.

1- Soit A_0 la matrice dont tous les coefficients non diagonaux sont égaux à 1. Calculer $\det A_0$.

2- Montrer que si n est pair, A est inversible.

3- Que dire du rang de A si n est impair ?

4- On considère un tas de n cailloux tels que quel que soit le caillou que l'on retire, il est toujours possible de séparer les autres en deux tas de même masse ; montrer que n est impair.

5- On suppose $n = 2k+1$, et que quel que soit le caillou que l'on retire, il est toujours possible de former deux tas de même masse de k cailloux ; montrer que dans ce cas, tous les cailloux ont la même masse.

Indications

1- On additionne toutes les colonnes à la dernière, ce qui permet de mettre $n-1$ en facteur ; ensuite on soustrait la dernière colonne aux autres ; $\det A = (n-1).(-1)^{n-1}$.

Autre méthode : on remarque que $A + I_n$ est symétrique, de rang 1, de trace n, donc semblable à $n.E_{1,1}$...

2- On remarque que A et A_0 ont le même déterminant modulo 2 :$\bar{1}$. Donc $\det A$ est un entier impair.

3- On applique ce qui précède à la matrice A' obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne ; A' est inversible, donc $\mathrm{rg} A \geq n-1$.

Réciproquement, le rang de A peut prendre la valeur n d'après 1). Il peut aussi prendre la valeur $n-1$: il suffit que sur chaque ligne il y ait le même nombre de 1 et de -1.

4- On suppose les cailloux numérotés ; on construit A ainsi : les coefficients de la ligne i correspondent aux deux tas quand on a enlevé le caillou i. Soit M la colonne

$$M = {}^t(m_1, m_2, ... m_n)$$

On a alors $A.M = 0$, donc A n'est pas inversible, donc n est impair.

5- Le rang de A est $n-1$, donc son noyau est de dimension 1.

$U = {}^t(1, ..., 1)$ est dans le noyau ; donc (U, M) est liée.

9 Rang par blocs 1

Montrer que si $\begin{bmatrix} I_r & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ est de rang r, $C = 0$; si $\begin{bmatrix} I_r & C \\ B & 0 \end{bmatrix}$ est de rang r, $BC = 0$.

Indications

Si $\begin{bmatrix} I_r & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ est de rang r, la famille des colonnes est de rang r ; or la famille des r premières est libre, donc les autres colonnes sont combinaisons linéaires des r premières ; donc $C = 0$.

Pour le deuxième, on essaie de se ramener au premier ; après tatonnements, on remarque que :

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ B & -I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & C \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & C \\ 0 & BC \end{bmatrix}$$

où s est le nombre de lignes de B.

$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ B & -I_s \end{bmatrix}$ est inversible, donc $\begin{bmatrix} I_r & C \\ 0 & BC \end{bmatrix}$ est de rang r ; la première question permet de conclure.

10 Rang par blocs 2

$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\mathrm{rg} M = \mathrm{rg} A + \mathrm{rg} C$$

Remarque

Pas facile.

Indications

M représente une application linéaire m de $E = E_1 \oplus E_2$ dans $F = F_1 \oplus F_2$.
On note a, b, c les applications linéaires :

$$a : E_1 \to F_1,\ b : E_2 \to F_1,\ c : E_2 \to F_2$$

Soit G un supplémentaire de $\ker c$ dans E_2 :

$$E_2 = \ker c \oplus G$$

On étudie $\mathrm{Im} m$:

$$\mathrm{Im} m = m(E_1 + E_2) = m(E_1) + m(E_2) = a(E_1) + m(\ker c) + m(G) = a(E_1) + b(\ker c) + m(G)$$

On vérifie ensuite que $m(G) \cap F_1 = \{0\}$. Finalement :

$$\mathrm{Im} m = (a(E_1) + b(\ker c)) \oplus m(G)$$

On vérifie aussi que $\dim m(G) = \dim(G) = \mathrm{rg} C$. Donc

$$\mathrm{rg} M = \mathrm{rg} A + \mathrm{rg} C \iff a(E_1) + b(\ker c) = a(E_1)$$

Conclusion :
$\mathrm{rg} M = \mathrm{rg} A + \mathrm{rg} C$ si et seulement si $b(\ker c) \subset \mathrm{Im}(a)$.

11 Morphismes multiplicatifs sur $M_n(\mathbb{C})$

Soit f définie sur $E = M_n(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, non constante, et vérifiant

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ f(AB) = f(A) f(B)$$

1- Déterminer $f(0)$ et $f(I_n)$.
2- Déterminer $\{A \in E / f(A) = 0\}$.
3- Montrer l'existence de g tel que $f = g \circ \det$.

Indications

1- $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$ ou 1. Si on suppose $f(0) = 1$, on en déduit

$$\forall M \in E,\ f(M) = f(M) f(0) = f(0) = 1$$

impossible, donc $f(0) = 0$.
De même, $f(I_n) = 0$ ou 1. Si on suppose $f(I_n) = 0$, on en déduit

$$\forall M \in E,\ f(M) = f(M) f(I_n) = 0$$

impossible, donc $f(I_n) = 1$.
2- Si M est inversible, $1 = f(I_n) = f(M) f(M^{-1})$, donc $f(M) \neq 0$.
Si M n'est pas inversible : M est de rang r avec $0 \leq r \leq n-1$, donc est équivalente à $N = \begin{bmatrix} 0 & J_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, qui est nilpotente. On en déduit $f(N) = 0$, d'où $f(M) = 0$.
3- On doit montrer que si $\det A = \det B$, alors $f(A) = f(B)$.
Soit $T = I_n + \lambda E_{i,j}$, avec $i \neq j$ et λ non nul, une matrice de transvection ; on montre que T^2 est semblable à T ; on en déduit que $f(T) = 1$; on montre aussi que l'ensemble des matrices de transvection engendre $SL_n(\mathbb{C})$.