Continuité uniforme

1 Produit

Soit f, g fonctions de A dans $\mathbb{C}$ bornées et uniformément continues ; montrer que $f.g$ est uniformément continue.

Donner un contre-exemple avec une seule fonction bornée.

2 $f : x \to \ln\left(1 + x^2\right)$

Est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Indications

Elle est lipchitzienne sur $\mathbb{R}$.

3 $f : x \to x. \ln x$

Est-elle uniformément continue ?

Indications

f se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$; donc f est uniformément continue sur tout segment $[0, a]$; par contre, f n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$: utiliser $u_n = n$ et $v_n = n + \frac{1}{\ln n}$.

4 $f : x \to x. \sin \frac{1}{x}$

Est-elle uniformément continue ?

Indications

f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, en posant $f(0) = 0$; donc f est uniformément continue sur tout segment $[-a, a]$; de plus, f a des limites finies en $\pm\infty$; on peut en déduire que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5 $f : x \to x. \sin x$

Est-elle uniformément continue ?

Indications

f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$: utiliser $u_n = n\pi$ et $v_n = n\pi + \frac{1}{n}$.

C'est un exemple de deux fonctions uniformément continues, où une seule est bornée, et le produit non uniformément continu.

6 $\lim\limits_{n} f(nh) = a$

1- Soit f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $h > 0$,

$$\lim_{n} f(nh) = a$$

Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = a$.

2- Généralisation : soit f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose que pour tout $h > 0$,

$$\lim_n f(nh) = a_h$$

Montrer que $\lim_{+\infty} f$ existe.

Indications

1- Fixons $\varepsilon > 0$; soit $\delta > 0$ associé par la continuité uniforme ; fixons ensuite h tel que $0 < h < \delta$; soit n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |f(n.h) - a| \leq \varepsilon$$

Soit $b = n_0.h$; on montre alors que :

$$\forall x \geq b, |f(x) - a| \leq 2.\varepsilon$$

Pour cela, on montre que si $x \geq b$, il existe $n \geq n_0$ tel que $nh \leq x < (n+1)h$.

2- Montrer d'abord que si h et k sont deux rationnels, $a_h = a_k$. On est alors ramené à la première question.

7 $\cos(x.\sin x)$

La fonction

$$f : x \to \cos(x.\sin x)$$

est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Indications

f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$: utiliser

$$u_n = 2n\pi,\ v_n = 2n\pi + \frac{1}{4n}$$

8 $\lim_n f(x+n) = 0$

1- Soit f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose que pour tout $x > 0$,

$$\lim_n f(x+n) = 0$$

Montrer que

$$\lim_{+\infty} f = 0$$

2- Que dire dans le cas où f est seulement continue ?

Indications

Dans le cas où f est seulement continue, on construit un contre-exemple.

9 $\lim_n f(n.x) = 0$

1- Soit f uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$; on suppose que pour tout $x > 0$,

$$\lim_n f(n.x) = 0$$

Montrer que

$$\lim_{+\infty} f = 0$$

2- Que dire dans le cas où f est seulement continue ?

3- Soit f uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$; on suppose que pour tout $x > 0$,

$$\lim_n f(n.x) = L_x \in \mathbb{R}$$

Montrer que f a une limite finie en $+\infty$.

Indications

2- Vrai aussi mais nettement plus difficile (utilise le théorème de Baire).
3- On montre que L_x est le même pour tous les x rationnels. Ensuite même méthode que pour 1.

10 Les fonctions presque périodiques

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On note

$$f_t : x \to f(x-t)$$

Pour $\varepsilon > 0$ et T réel, on dit que T est une $\varepsilon-$presque période de f si

$$\|f - f_T\|_\infty \leq \varepsilon$$

On dit que f est presque périodique si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que tout segment de longueur R contienne au moins une $\varepsilon-$presque période de f.

1- Exemples de fonctions presque périodiques ?
2- Montrer que toute fonction presque périodique est bornée.
3- Montrer que si f est presque périodique, f^2 aussi.
4- Montrer que toute fonction presque périodique est uniformément continue.
5- Montrer que si f est presque périodique et $g \in C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, alors $g \circ f$ est presque périodique.
6- Soit (f_n) une suite de fonctions presque périodiques convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est presque périodique.
7- Soit $f : t \to \cos(t) + \cos\left(\sqrt{2}t\right)$. Montrer que f n'est pas périodique.
Soit A l'ensemble des translatées de f :

$$A = \{f_t / \, t \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que toute suite d'éléments de A possède une suite extraite convergente pour $\|\|_\infty$.
8- Montrer la même propriété pour toute fonction presque périodique.

Indications

1- Les fonctions périodiques.
2- On fixe $\varepsilon = 1$ et $R > 0$ associé.
Soit $I = [0, R]$ et

$$M = \sup_I |f|$$

On montre que $\|f\|_\infty \leq M + \varepsilon = M + 1$.
4- On fixe $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ associé.
Soit $J = [-R, R]$ et $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in J, \, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

On peut imposer $0 < \delta \leq R$.
Soit x, y deux réels tels que $0 \leq y - x \leq \delta$; on montre alors que

$$|f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$$

à l'aide d'une $\varepsilon-$presque période T appartenant à $[x, x + R]$.