Applications linéaires continues

1 Soit $I = [0, 1]$, $E = C^\circ(I, \mathbb{R})$ muni de $\| \|_\infty$. Soit $T : f \to f(\frac{1}{2})$. T est-il continu ? Même question avec $\| \|_1$.

Reprendre l'exercice en remplaçant $C^\circ(I, \mathbb{R})$ par $C^\infty(I, \mathbb{R})$.

2 Soit $I = [0,1]$, $E = C(I, \mathbb{R})$, $F = \{ f \in E \,/\, f(0) = f(1) = 0 \}$. Soit $u : f \to f(0)$; étudier la continuité de u sur E, puis trouver l'adhérence, l'intérieur et la frontière de F, E étant muni de N_1 ou N_∞.
Mêmes questions avec G ensemble des fonctions positives.

3 Soit $E = \mathbb{R}[X]$; si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $N_A(P) = \sup_A |P|$; à quelles conditions est-ce une norme sur E ? On suppose que c'est le cas et on note $\lambda : P \to P(0)$; donner une CNS pour que λ soit continue.
Donner une CNS pour que N_A et N_B soient équivalentes.

4 Soit $E = C^\circ([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \|_\infty$. Soit $X = \{ f \in E \,/\, \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1 \}$. Montrer que $f \to \int_0^{1/2} f$ est C° sur E. Montrer que X est convexe, fermé dans E et que $\inf \{ \|f\| \,/\, f \in X \} = 1$, non atteint.
Comparer à des propriétés connues.

5 Soit E un $\mathbb{R}$-EVN, f un morphisme additif de E borné sur $B(0,1)$. Montrer que f est une AL C°.

6 Soit E l'ensemble des solutions réelles de : $y''+2y'+2y = 0$; on définit $\| \|$ par $\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} e^{2t} f^2(t)dt$.
Montrer qu'il s'agit d'une norme sur E ; montrer que la dérivation D est un endomorphisme continu de E ; est-ce une isométrie ?

7 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour P élément de E, on note $\|P\|$ le maximum des modules des coefficients de P.
a Montrer qu'on définit ainsi une norme sur E.
b Pour $n \geq 0$, on définit T_n par $T_n(P) = P^{(n)}(0)$. Montrer que T_n est une forme linéaire continue sur E.
c Soit P un élément de E. Est-ce-que $(T_n(P))$ est bornée ? Est-ce-que (T_n) est bornée ?

8 Soit f une AL telle que l'image de toute suite de limite nulle est bornée. Montrer que f est continue.

9 Soit $I = [a, b]$, $E = C^\circ(I, \mathbb{C})$ muni de $\| \|_\infty$. Soit f une forme linéaire positive sur E (l'image de toute fonction positive est un réel positif). Montrer que f est C°.

10 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du PSC ; soit $H = \{ P = \sum_k a_k X^k \,/\, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = 0 \}$; montrer que H est un hyperplan fermé dans E et que $H^\circ = \{0\}$; mêmes questions avec $(P/Q) = \int_0^1 PQ$ et $H = \{ P \in E / \int_0^1 P(t)e^t dt = 0 \}$.

11 Soit $I = [0,1]$, $E = C^\circ(I, \mathbb{R})$. Pour f élément de E, on note $g = u(f)$ l'unique primitive de f d'intégrale nulle sur I
Montrer que u est bien définie et C° pour $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$.
Montrer que $g(x) = \int_0^1 (\int_t^x f)dt$. Montrer que $\|u\| = ½$ pour $\| \|_\infty$.

12 Soit E un EVN, u et v des éléments de $LC(E)$ tels que $uv - vu = Id$. Calculer $uv^n - v^n u$, montrer que v est nilpotent, puis que $v = 0$; conclure. Trouver une démonstration plus simple si la dimension de E est finie.
Examiner le cas où $E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$ et $v(P) = XP(X)$.