Topologie

Compacts

1 Soit E un EVN, B la boule unité fermée, S sa frontière. Montrer que B est compacte SSI S l'est.
On pourra utiliser un produit de compacts.

2 Soit E un EVN, A et B deux parties de E ; soit $C = A+B$. Montrer que : A ouvert dans E $\Rightarrow C$ ouvert dans E, A et B compacts $\Rightarrow C$ compact, A compact et B fermé dans $E \Rightarrow$ C fermé dans E.

3 Soit $A \subset \mathbb{C}$ non vide bornée ; montrer qu'il existe un disque fermé de rayon minimal unique contenant A.

4 Soit E un EVN de dimension finie, K une partie compacte de E ; soit A l'ensemble des endomorphismes u tels que $u(K) \subset K$. Montrer que A est compact si et seulement si K engendre E.

5 Ensembles de Julia : Soit $c \in \mathbb{C}$; on définit une suite par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z_{n+1} = z_n{}^2 + c$; montrer que si $|z_0| > 2 + |c|$, alors $\lim_n |z_n| = +\infty$; montrer que l'ensemble K_c des valeurs de z_0 pour lesquelles (z_n) est bornée est compact. Tracer K_c avec Python.

6 Soit f définie, continue sur un compact, et bijective ; montrer que f est un homéomorphisme.

7 Soit K_0 un compact non vide, et $f: K_0 \to K_0$ continue. On pose $K_{n+1} = f(K_n)$.
Soit K l'intersection des K_n. Montrer que K est un compact non vide et que $f(K) = K$.

8 Soit E un EVN, M un SEV de E ; soit $a \in E$, $m \in M$; montrer que $d(a,M) = d(a+m,M)$; pour $\lambda > 0$, montrer que $d(\lambda.a,M) = \lambda.d(a,M)$. On suppose que M est un SEV strict fermé dans E ; montrer que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists\, u \in E, \|u\| = 1$ et $d(u,M) \geq 1-\varepsilon$.

Th de Riesz : montrer que si E n'est pas de dimension finie, $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

9 Soit K un compact, A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $f: A \times K \to \mathbb{R}$ C^0; soit $g(x) = \inf_{y \in K} f(x,y)$; montrer que g est C^0 sur A. Généraliser au cas où A est une partie d'un EVN.

10 Soit E un compact et $f: E \to E$ telle que, si $x \neq y$, alors $|f(x) - f(y)| < |x-y|$. Montrer que f peut ne pas être contractante. Montrer que : $\exists!\, c \in E$, $f(c) = c$ et $\forall x \in E$, $\lim_n f^n(x) = c$.

11 Soit K un compact convexe non vide de E EVN, et $f: K \to K$ 1-lip. Montrer que f possède un point fixe.
On pourra utiliser $f_n : x \to (1-\frac{1}{n}) f(x) + \frac{a}{n}$, où $a \in K$.
Si de plus E est préhilbertien, montrer que les points fixes constituent un convexe.

12 Soit B une forme bilinéaire continue sur $E \times F$, montrer que :
$\exists K > 0, \forall x \in E, \forall y \in F, \|B(x,y)\| \leq K \|x\| \|y\|$.

13 Soit E un EVN, et f une AL surjective de E sur $F = \mathbb{R}^p$. Soit $N : x \to \inf\{\|y\| / f(y) = x\}$.
Montrer que N est bien définie, que c'est une semi-norme sur F, et que f est continue SSI N est une norme.

14 Montrer qu'il n'existe pas de partition de $\mathbb{R}^2$ en une famille de cercles de rayons strictement positifs, par l'absurde, en construisant une suite $C_n(a_n, r_n)$ vérifiant $a_n \in C_{n+1}$ et $r_{n+1} \leq \frac{1}{2} r_n$.

15 Soit E un EVN, F un SEV fermé dans E, G un SEV de dimension finie, montrer que $F+G$ est fermé.

Polynômes

1 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $I = [-1,1]$; on pose $\|P\| = \max_I |P|$; soit $a > 1$; montrer l'existence de $C > 0$ tel que : $\forall P \in E$, $|P(a)| \leq C.\|P\|$; on peut montrer que $C = T_n(a)$ convient et est optimal…

2 On fixe $n \geq 1$. $E = \mathbb{C}_n[X]$; pour A partie de $\mathbb{C}$, on note Π_A l'ensemble des polynômes unitaires de degré n dont les racines sont dans A ; pour $z \notin A$, minorer $\{ |P(z)| \ / \ P \in \Pi_A \}$; montrer que si A est fermée, Π_A est fermé dans E ; que dire si A est compacte ?
Si A est ouverte, Π_A est-il ouvert dans E ? dans l'ensemble des polynômes unitaires de degré n ?

Matrices

1 Soit f définie sur $GL_n(\mathbb{R})$ par $f(X) = \det(X)X^{-1}$.
Montrer que f possède un unique prolongement continu sur $M_n(\mathbb{R})$.

2 Soit (A_k) une suite d'éléments de $E = M_n(\mathbb{C})$ convergeant vers A ; on suppose que pour tout k, le spectre de A_k est contenu dans X ; montrer que le spectre de A est contenu dans $\overline{X}$.

3 La fonction rang est-elle continue au point I_n, au point 0_n ?

4 Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, $0 \leq r \leq n$, $F_r = \{ M \in E \ / \ \operatorname{rg} M \leq r \}$, $G_r = \{ M \in E \ / \ \operatorname{rg} M = r \}$.
Montrer que F_r est fermé dans E et que G_r est dense dans F_r. F_r, G_r sont-ils connexes par arcs ?

Connexes par arcs

1 Montrer que $SO(n)$ est ouvert et fermé dans $O(n)$; est-il compact ? CPA ?

2 Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

3 Soit $f : \mathbf{U} \to \mathbb{R}$ C°. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés ayant même image.

4 $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$, $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})^2$ sont-ils connexes par arcs ?

5 Soit U un ouvert connexe par arcs non vide de $E = \mathbb{R}^n$. Montrer que deux points quelconques x et y de U peuvent être joints par une ligne polygonale contenue dans U. On note $d(x, y)$ l' inf des longueurs de ces lignes. Montrer qu'il s'agit d'une distance sur U. La topologie associée est-elle la topologie usuelle ?