Topologie II

Contents

1 Applications uniformément continues

Dans la suite, F désigne un espace normé et A un espace métrique, partie d'un espace normé.

1.1 Généralités

1.1.1 Définition

Soit f une application de A dans F ; on dit que f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

1.1.2 Applications lipschitziennes

Théorème

Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration

Si f est $k-$lipschitzienne, $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ convient.

1.1.3 Théorème

Toute application uniformément continue est continue.

Démonstration

On compare :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in A, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

Dans le deuxième cas, δ dépend non seulement de ε, mais aussi de x.

1.1.4 Somme

La somme de deux applications f et g uniformément continues sur A est uniformément continue.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$; soit $\delta_1 > 0$ tel que $\forall x, y \in A, \|x - y\| \leq \delta_1 \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$; analogue avec g.

Ensuite, on pose

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

1.1.5 La racine carrée

Lemme

Soit $a \geq 0$ et $h \geq 0$; $\sqrt{a+h} \leq \sqrt{a} + \sqrt{h}$

Exercice

La racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}+$.

Démonstration

Pour $\varepsilon > 0$, choisir $\delta = \varepsilon^2$.

1.2 Caractérisation séquentielle

1.2.1 Propriété

Soit f une application de A dans F ; f est uniformément continue si et seulement si

$$\forall (x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_n x_n - y_n = 0 \Rightarrow \lim_n f(x_n) - f(y_n) = 0$$

Démonstration

1e partie

Supposons f uniformément continue et $\lim_n x_n - y_n = 0$; soit $\varepsilon > 0$ et δ associé à ε par la continuité uniforme.

$\lim_n x_n - y_n = 0$, donc :

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \|x_n - y_n\| \leq \delta$$

Alors :

$$\forall n \geq n_0, \|f(x_n) - f(y_n)\| \leq \varepsilon$$

2e partie

Supposons f non uniformément continue ; il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0, \exists x, y \in A, \|x - y\| \leq \delta \wedge \|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon$$

En particulier, pour $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n, y_n \in A, \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n} \wedge \|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$$

Les deux suites (x_n) et (y_n) vérifient

$$\lim_n x_n - y_n = 0$$

mais pas

$$\lim_n f(x_n) - f(y_n) = 0$$

1.2.2 Exemple 1

$f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 \end{array} \right.$ n'est pas uniformément continue.

Démonstration

Utiliser $u_n = n$ et $v_n = n + \frac{1}{n}$.

1.2.3 Exemple 2

$f : \left\{ \begin{array}{c}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to \ln x \end{array} \right.$ n'est pas uniformément continue ; par contre, si $a > 0$, sa restriction à $[a, +\infty[$ l'est.

Démonstration

Utiliser $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{2}{n}$; sur $[a, +\infty[$, ln est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{a}$.

1.2.4 Exemple 3

Une fonction bornée, continue, mais non uniformément continue :

$$f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sin x^2 \end{array} \right.$$

Démonstration

Utiliser $u_n = \sqrt{2n\pi}$ et $v_n = \sqrt{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}$.

1.3 Compléments

1.3.1 Cas des fonctions bornées

Si f et g sont uniformément continues et bornées, à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors $f.g$ est uniformément continue.

Démonstration

On suppose f et g non nulles.

$$\forall x, y \in A,\ fg\,(y) - fg\,(x) = f\,(y)\,(g\,(y) - g\,(x)) + (f\,(y) - f\,(x))\,g\,(x)$$

Fixons $\varepsilon > 0$; puis $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall x, y \in A, \|x - y\| \leq \delta_1 \Rightarrow |f\,(y) - f\,(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2.\,\|g\|_\infty}$$

δ_2 analogue, puis $\delta = \min\,(\delta_1, \delta_2)$, AQT...

1.3.2 Si l'une n'est pas bornée

Id et sin sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$, mais leur produit ne l'est pas.

Démonstration

$u_n = n\pi$ et $v_n = n\pi + \frac{1}{n}$.

1.3.3 Un critère

Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}+$; alors :

$$\exists A > 0, \exists B > 0, \forall x \geq 0, \|f\,(x)\| \leq Ax + B$$

Démonstration

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow \|f\,(x) - f\,(y)\| \leq 1$$

Soit $x > 0$; soit $n = \left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor$;

$$0 \leq \delta \leq 2\delta \leq ... \leq n\delta \leq x \leq (n+1)\,\delta$$

On en déduit :

$$\|f\,(x)\| \leq \|f\,(0)\| + \|f\,(\delta) - f\,(0)\| + \|f\,(2\delta) - f\,(\delta)\| + ... \|f\,(x) - f\,(n\delta)\| \leq \|f\,(0)\| + n + 1$$

Donc

$$\|f\,(x)\| \leq \|f\,(0)\| + n + 1 \leq C + \frac{x}{\delta}$$

où $C = 1 + \|f\,(0)\|$.

2 Applications linéaires continues

2.1 Caractérisation

2.1.1 Théorème

Soit E, F deux espaces vectoriels normés ; soit $f \in L(E,F)$; les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue au point 0.
2) f est continue.
3) f est uniformément continue.
4) f est lipschitzienne.
5) $\exists k > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.
6) Il existe une boule fermée de centre 0, de rayon $\delta > 0$, sur laquelle f est bornée.

Démonstration de $6 \Rightarrow 5$

Soit $B = B_f(0,\delta)$ et $M = \sup\{\|f(x)\| / x \in B\}$; on va montrer que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k \|x\|$$

avec $k = \frac{M}{\delta}$; c'est vérifié si $\|x\| = \delta$; de plus, tout vecteur y s'écrit $y = \lambda x$, avec $\|x\| = \delta$, et $\lambda = ?$

Réponse

Si y n'est pas nul, on pose $x = \delta.\frac{y}{\|y\|}$; x vérifie évidemment $\|x\| = \delta$.

$\lambda = \frac{\|y\|}{\delta}$; ensuite, de $\|f(x)\| \leq k\|x\|$, on déduit $\|f(y)\| \leq k\|y\|$ en multipliant par λ.

2.1.2 En pratique

Pour montrer que $f \in L(E,F)$ est continue, on cherche une constante $k > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k \|x\|$$

Pour montrer que $f \in L(E,F)$ n'est pas continue, on cherche à montrer que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ n'est pas majoré, par exemple en exhibant une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\left(\frac{\|f(x_n)\|}{\|x_n\|}\right)$ tende vers $+\infty$.

2.1.3 $L_C(E,F)$

L'ensemble $L_C(E,F)$ des applications linéaires continues de E vers F est un espace vectoriel.

2.2 Exemples

2.2.1 Une application linéaire non continue

$E = F = C^\infty([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\|_\infty$; $u(f) = f'$.
On peut utiliser par exemple :

- $f_n : x \to \sin nx$
- $g_n : x \to \exp(nx)$
- $h_n : x \to x^n$

2.2.2 $P \to P(c)$

Ici, $E = \mathbb{R}[X]$; $F = \mathbb{R}$; c est un réel ; $\|P\| = \max\limits_k |a_k|$.

$$u : P \to P(c)$$

Réponse

u est continue si et seulement si $|c| < 1$.

2.2.3 Le même, avec $\|\|_\infty$

Ici, $I = [0,1]$; $\|P\|_\infty = \sup\limits_I |P|$.

1er cas : $c \in I$.

On montre facilement que u est continue ; $k = 1$ convient.

2e cas : $c \notin I$.

Dans ce cas, u n'est pas continue.
Si $c > 1$: $P_n = X^n$.
Si $c < 0$: $P_n = (1 - X)^n$.
Dans les deux cas : $P_n = \left(X - \frac{1}{2}\right)^n$.

2.2.4 Les fonctions positives

Soit $I = [0,1]$ et $E = C(I, \mathbb{R})$; soit $P = \{f \in E / \forall t \in I, f(t) \geq 0\}$; P est-il fermé dans E ?

1er cas : $\|\|_\infty$.

Etudier la continuité sur E de $u_c : f \to f(c)$; en déduire que P est fermé dans E.

Réponse

$$\forall f \in E, |u_c(f)| = |f(c)| \leq \|f\|_\infty$$

Donc u_c est continue ; l'image réciproque de $[0, +\infty[$ par u_c est donc un fermé de E ; ensuite ?
P est donc une intersection de fermés de E.

2e cas : $\|\|_1$.

Etudier la continuité sur E de u_c ; soit $f \in E \setminus P$; montrer que

$$d = \mathrm{d}(f, P) > 0$$

et que P est fermé dans E.

Réponse

A l'aide de chapeaux pointus, on montre que u_c n'est pas continue ; néanmoins, P est fermé dans E :
Soit $f \in E \setminus P$.

$$\forall g \in P, \|f - g\|_1 \geq \left\|f - f^+\right\|_1 = \left\|f^-\right\|_1 > 0$$

Donc $d = \mathrm{d}(f, P) = \mathrm{d}(f, f^+) > 0$ et

$$B(f, d) \subset E \setminus P$$

ce qui prouve que $E \setminus P$ est ouvert dans E.

2.3 Complément : les formes linéaires continues

Soit E un espace normé ; soit $f \in E^* - \{0\}$; soit H son noyau ; alors :
f est continue si et seulement si H est fermé dans E.

Démonstration

Si f est continue, $H = f^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E.

Supposons f non continue ; on sait alors que

$$\left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} / \, x \in E - \{0\} \right\}$$

n'est pas majoré ; il existe donc une suite (x_n) d'éléments non nuls telle que

$$\forall n \geq 1, \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} \geq n$$

Quitte à remplacer x_n par $\frac{1}{f(x_n)}.x_n$, on peut supposer que $f(x_n) = 1$. Dans ce cas :

$$\forall n \geq 1, \, \|x_n\| \leq \frac{1}{n}$$

On constate que $(y_n) = (x_1 - x_n)$ est une suite d'éléments de H qui converge vers x_1 qui n'appartient pas à H ; donc H n'est pas fermé dans E.

2.4 La norme d'opérateur

Soit E et F deux espaces vectoriels normés ; soit $u \in L_C(E, F)$.

On note $|||u|||$ et on appelle norme d'opérateur de u, ou norme triple, ou norme subordonnée, le nombre

$$|||u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in B} \|u(x)\|$$

où B désigne la boule unité fermée.

$|||u|||$ est aussi le plus petit rapport de Lipschitz de u.

On montre facilement que cette borne supérieure est un maximum si E est de dimension finie.

3 Compacité

3.1 Généralités

3.1.1 Définition

On dit que (A, d) est compact si toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence.

En pratique, A est une partie de (E, N) ; A est compacte si toute suite d'éléments de A possède une suite extraite convergeant vers une limite $l \in A$.

3.1.2 Exemples

$\mathbb{R}$, $]0, 1[$ sont-ils compacts ?

3.1.3 Compacts et fermés

Théorème

Si A est compact, alors A est fermé dans E, et borné.

Démonstration

Borné

Supposons A non borné ; pour tout $n \geq 0$, il existe un $u_n \in A$ tel que $\|u_n\| \geq n$; soit $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ une suite extraite quelconque ; on a :

$$\forall n, \|v_n\| = \left\|u_{\varphi(n)}\right\| \geq \varphi(n) \geq n$$

Donc $(\|v_n\|)$ tend vers $+\infty$; donc (v_n) diverge.

On a montré qu'aucune suite extraite de (u_n) ne converge : A n'est donc pas compact.

Fermé

Soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $u \in E$; on doit montrer que $u \in A$.

Or (u_n) a une valeur d'adhérence dans A, et u est la seule valeur d'adhérence de (u_n) dans E.

3.1.4 Fermé dans un compact

Théorème

Si A est fermé dans B compact, alors A est compact.

Démonstration

Soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$; B étant compact, (u_n) possède une suite extraite (v_n) convergeant vers un élément u de B.

A étant fermé dans B, $u \in A$. Conclusion, (u_n) possède une valeur d'adhérence dans A.

3.1.5 Caractérisation des suites convergentes d'un compact

Théorème

Soit A compact, et $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$; la suite (u_n) converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Remarque

Une suite divergente ayant une seule valeur d'adhérence ?

Réponse

$u_{2n} = n, u_{2n+1} = 0$.

Démonstration

Soit a la valeur d'adhérence de (u_n) ; fixons $\varepsilon > 0$; soit

$$X = \{n \in \mathbb{N} / \ \|u_n - a\| \geq \varepsilon\}$$

Supposons par l'absurde X infini ; alors X est l'image d'une fonction φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

$$X = \{\varphi(n) \, / \, n \in \mathbb{N}\}$$

On peut donc écrire

$$\forall n \geq 0, \left\|u_{\varphi(n)} - a\right\| \geq \varepsilon$$

A étant compact, la suite $(v_n) = \left(u_{\varphi(n)}\right)$ admet une suite extraite $\left(v_{\psi(n)}\right)$ qui converge vers $b \in A$; or

$$\forall n \geq 0, \left\|v_{\psi(n)} - a\right\| \geq \varepsilon$$

Par passage à la limite, $\|b - a\| \geq \varepsilon$:

(u_n) a au moins deux valeurs d'adhérence, contradiction, donc X est fini. On a montré que (u_n) converge vers a.

3.1.6 Produit

Exercice important

Le produit d'un nombre fini de compacts est compact.

Démonstration

Soit A et B deux compacts ; soit $K = A \times B$.

Soit $(u_n) = ((a_n, b_n))$ une suite d'éléments de K ; (a_n) admet une suite extraite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ convergeant vers $a \in A$; $\left(b_{\varphi(n)}\right)$ admet une suite extraite $\left(b_{\varphi\circ\psi(n)}\right)$ convergeant vers $b \in B$.

Alors, $\left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)$ converge vers $(a, b) \in K$.

3.1.7 Un fermé borné non compact

Exercice

Soit $E = \left(CB(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\|_\infty\right)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; soit

$$B = B_f(0, 1)$$

Construire une suite (f_n) d'éléments de B tels que

$$\forall p < q,\ \|f_p - f_q\|_\infty = 1$$

et en déduire que B n'est pas compacte.

Réponse

f_n nulle hors de $[n, n+1]$; soit (g_n) une suite extraite de (f_n) ; (g_n) ne peut pas converger car

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|g_{n+1} - g_n\|_\infty = 1$$

3.2 Cas de $\mathbb{R}^n$

3.2.1 Compacts de $\mathbb{R}$

Théorème

Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées dans $\mathbb{R}$, et bornées.

Démonstration

Soit A une partie fermée dans $\mathbb{R}$ et bornée ; soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$.

A étant bornée, (u_n) possède une suite extraite (v_n) convergeant vers un réel u.

A étant fermée dans $\mathbb{R}$: $u \in A$.

3.2.2 Compacts de $\mathbb{R}^n$

Théorème

Les parties compactes de $E = \mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\|_\infty$ sont les parties fermées dans $\mathbb{R}^n$, et bornées.

Démonstration

Soit A une partie fermée dans $\mathbb{R}^n$, et bornée. A est contenue dans une boule $B = [-r, r]^n$ qui est un produit de compacts, donc un compact.

De plus A est fermée dans E, donc dans B ; elle est donc compacte.

3.3 Image continue d'un compact

3.3.1 Image d'une partie compacte par une application continue

Théorème

Soit K un compact, et $f \in C^0(K, F)$; alors $f(K)$ est compact.

Démonstration

Soit $(y_n) = (f(x_n))$ une suite d'éléments de $f(K)$; (x_n) admet une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergeant vers $a \in K$.

f étant continue, $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $f(a) \in f(K)$.

Cas particulier : $F = \mathbb{R}$

Soit K un compact non vide, et $f \in C^0(K, \mathbb{R})$; alors f est bornée, et atteint un maximum et un minimum.

3.3.2 Fonctions en U

Exercice

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose de plus que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ (on dit que f est coercive).

Montrer que f admet un minimum.

Démonstration

Soit $A = f(0)$; soit $a > 0$ tel que

$$\forall x \geq a, f(x) \geq A$$

De même, soit $b < 0$ tel que

$$\forall x \leq b, f(x) \geq A$$

La restriction de f au compact $K = [b, a]$ atteint un minimum m en un point $c \in K$:

$$\forall x \in K, f(x) \geq f(c) = m$$

De plus

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus K, f(x) \geq f(0) \geq m$$

car $0 \in K$.

3.3.3 Distance à un compact

Exercice

Soit E un espace vectoriel normé, et A une partie non vide compacte ; soit $b \in E$; montrer que

$$\exists a \in A,\ \|a - b\| = d(b, A)$$

Démonstration

$x \to \|b - x\|$ est continue (car 1-lipschitzienne) sur A compact, donc atteint un minimum.

3.3.4 Distance entre un compact et un fermé

Exercice

Soit E un espace vectoriel normé, K une partie non vide compacte et T une partie fermée de E, non vide ; on suppose K et T disjoints ; montrer que

$$\exists m > 0, \forall x \in K, \forall y \in T, \|x - y\| \geq m$$

Démonstration

La fonction d_T est continue (car 1-lipschitzienne) sur K compact, donc atteint un minimum m en un point $c \in K$.

De plus $m = d_T(c)$ n'est pas nul car d_T n'est nulle que sur $\overline{T}$, et ici, $\overline{T} = T$.

3.3.5 Diamètre d'un compact

Exercice

Soit K un compact non vide ; alors :

$$\exists x, y \in K, \|x-y\| = \operatorname{diam}(K)$$

Démonstration

La fonction $f : (x, y) \to \|x-y\|$ est continue sur K^2 compact.

3.4 Le théorème de Heine

3.4.1 Théorème

Soit K un compact, et $f \in C^0(K, F)$; alors f est uniformément continue.

Démonstration

Supposons f non uniformément continue ; alors

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in K, \|x-y\| \leq \delta \wedge \|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon$$

Pour $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n, y_n \in K, \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n} \wedge \|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$$

La suite (x_n) possède une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergeant vers un point $a \in K$; la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ converge vers la même limite ; or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right\| \geq \varepsilon$$

Par passage à la limite, f étant continue au point a,

$$\|f(a) - f(a)\| \geq \varepsilon$$

Contradiction, donc f est uniformément continue.

3.4.2 Fonction ayant une limite finie

Exercice

Soit $I = \mathbb{R}+$, et $f \in C^0(I, F)$; on suppose que f a une limite $L \in F$ en $+\infty$.

Montrer que f est bornée et uniformément continue.

Généraliser à f définie sur $E = \mathbb{R}^n$.

Bornée

Fixons $\varepsilon = 1$ et $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \|f(x) - L\| \leq 1$$

f étant continue sur $[0, A]$ compact,

$$\exists M_1 > 0, \forall x \in [0, A], \|f(x)\| \leq M_1$$

Il suffit de choisir $M = ?$

$$M = \max(M_1, 1 + \|L\|)$$

Uniformément continue

Fixons $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \|f(x) - L\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Alors

$$\forall x, y \geq A, \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ensuite, f est continue sur $K = [0, A]$ compact, donc uniformément continue sur ce segment ; donc

$$\exists \delta > 0, \forall x, y \in K, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Il reste à conclure que

$$\forall x, y \in I, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

Autre méthode

Utiliser

$$g = f \circ \tan$$

définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.4.3 Autre démonstration du théorème de Heine

Soit K un compact, et $f \in C^0(K, F)$; fixons $\varepsilon > 0$. Soit

$$A = \left\{(x, y) \in K^2 / \|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon\right\}$$

Que dire de A ?

A est fermé dans K^2 compact, donc A est compact ; ensuite ? On introduit

$$d : (x, y) \to \|x - y\|$$

d est continue sur A compact, donc atteint un minimum $\delta > 0$ (pourquoi non nul ?)
Conclusion :

$$\forall x, y \in K, \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

3.5 Compléments

3.5.1 Une suite et sa limite

Exercice

Soit E un espace normé, et (u_n) une suite convergente ; soit a sa limite ; soit

$$K = \{a\} \cup \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$$

K est compact.

Démonstration

Soit $(v_p) \in K^{\mathbb{N}}$; pour tout $n \geq 0$, notons $X_n = \{p \geq 0 / v_p = u_n\}$.

Distinguons deux cas :

cas 1

Il existe un entier n tel que X_n est infini. Dans ce cas ?

Dans ce cas, (v_p) possède une suite extraite constante.

cas 2

Tous les X_n sont finis ; dans ce cas, on montre que (v_p) converge vers a. En effet, soit $\varepsilon > 0$.

$$R = \{n \geq 0 / \ \|u_n - a\| > \varepsilon\}$$

est fini ; de même, l'ensemble suivant est fini :

$$X = \bigcup_{n \in R} X_n$$

De plus :

$$\forall p > \max(X), \|v_p - a\| \leq \varepsilon$$

Conclusion : (v_p) converge vers a.

3.5.2 Précompacts

On dit qu'un espace métrique A est précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε qui recouvrent A.

Montrer que tout compact est précompact.

Démonstration

Supposons le contraire ; il existe donc $\varepsilon > 0$ tel qu'aucune union finie de boules de rayon ε ne recouvre A.

On choisit $a_0 \in A$; $B(a_0, \varepsilon)$ ne recouvre pas A ; il existe donc $a_1 \in A \setminus B(a_0, \varepsilon)$; on construit par récurrence sur n une suite (a_n) d'éléments de A tels que :

$$\forall n \geq 1, a_n \notin \bigcup_{0 \leq k \leq n-1} B(a_k, \varepsilon)$$

Clairement :

$$\forall p < q, \|a_p - a_q\| \geq \varepsilon$$

Soit (b_n) une suite extraite de (a_n) ; (b_n) vérifie la même propriété :

$$\forall p < q, \|b_p - b_q\| \geq \varepsilon$$

En particulier :

$$\forall n \geq 0, \|b_{n+1} - b_n\| \geq \varepsilon$$

Conclusion ?

(a_n) ne possède pas de suite extraite convergente ; donc A n'est pas compact.

Remarque

Si E est un espace normé de dimension finie, quelles sont les parties précompactes de E ?

3.5.3 Suites décroissante de compacts

Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non vides ; soit

$$K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$$

Alors K est un compact non vide.

Démonstration

Tout d'abord, K est fermé dans K_0 compact, donc compact.

Ensuite, on fixe une suite (u_n) telle que :

$$\forall n \geq 0, u_n \in K_n$$

Soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ une suite extraite convergeant vers une limite $u \in K_0$; fixons $n \geq 0$.

$$\forall p \geq n, u_{\varphi(p)} \in K_n$$

De plus, K_n est fermé dans K_0 ; donc $u \in K_n$.

En conclusion

$$u \in K$$

Et K est donc non vide.

3.5.4 Application : le théorème de Dini

Soit A un compact ; soit (f_n) une suite de fonctions continues sur A à valeurs réelles convergeant simplement vers une fonction f continue ; on suppose que :

$$\forall n \geq 0, f_{n+1} \leq f_n$$

Alors la convergence est uniforme.

Démonstration

Fixons $\varepsilon > 0$; notons

$$A_n = \{x \in A / \, f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon\}$$

Que dire de (A_n) ?

C'est une suite décroissante de compacts, dont l'intersection est vide ; donc :

$$\exists n \geq 0, A_n = \phi$$

Alors :

$$\forall p \geq n, A_p = \phi$$

Donc :

$$\forall p \geq n, \sup_A |f_p - f| = \sup_A (f_p - f) \leq \varepsilon$$

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

4.1 Équivalence des normes sur un espace de dimension finie

4.1.1 Théorème

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie ; les normes sur E sont équivalentes.

4.1.2 Démonstration (non exigible)

Cas où $E = \mathbb{R}^n$

On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique ; montrons que toute norme $\|\|$ est équivalente à $\|\|_\infty$.

1) Il existe $c > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \, \|x\| \leq c \, \|x\|_\infty$$

2) Soit $S = \{x \in E / \, \|x\|_\infty = 1\}$; S est compact pour $\|\|_\infty$.

3) L'application $f : x \to \|x\|$ est continue sur $(S, \|\|_\infty)$.

4) Conclure.

Réponses

$$c = \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|$$

S est compact car fermé et borné dans $(\mathbb{R}^n, \|\|_\infty)$; f est lipschitzienne de rapport c ; f atteint donc un minimum $m > 0$:

$$\forall x \in S, \|x\| \geq m. \|x\|_\infty$$

Cette formule valable sur S est valable sur E, car tout vecteur x de E s'écrit $x = \lambda y$, avec $y \in S$, et $\lambda \geq 0$.

4.1.3 Exercice

Démontrer le théorème dans le cas général ; on utilise un isomorphisme d'espaces vectoriels f de $\mathbb{R}^n$ sur E, et on remarque que si $\|\|$ est une norme sur E, alors $\|\| \circ f$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

4.1.4 Corollaire

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie ; les notions suivantes ne dépendent pas du choix de la norme :

ouverts, fermés, adhérence, intérieur, limites, continuité, voisinages, bornés, compacts, connexes par arcs...

4.2 Convergence, continuité

4.2.1 Théorème

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $B = (e_1, ..., e_n)$ une base ; soit

$$(X_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{k,j}.e_j \right)$$

une suite d'éléments de E ; la suite (X_k) converge vers

$$L = \sum_{j=1}^{n} l_j.e_j$$

si et seulement si, pour tout j, la suite $(x_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l_j.

Démonstration

Les normes étant équivalentes, on choisit la suivante :

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j.e_j \right\| = \max_j |x_j|$$

Ensuite, la démonstration est presque identique à celle déjà vue dans le cas des espaces produits :

$$\forall k \geq 0,\ 0 \leq |x_{k,1} - l_1| \leq \|X_k - L\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - l_j|$$

4.2.2 Théorème

Il en est de même pour une fonction f à valeurs dans E : notons

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) e_j$$

La fonction f converge vers

$$L = \sum_{j=1}^{n} l_j . e_j$$

au point a si et seulement si les fonctions (f_j) convergent vers l_j.

Cas particulier

La fonction f est continue au point a si et seulement si les fonctions (f_j) le sont.

4.3 Compacts d'un espace normé E de dimension finie

4.3.1 Fermés bornés

Théorème

Soit E un espace normé de dimension finie ; les compacts de E sont les fermés bornés.

4.3.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée a au moins une valeur d'adhérence.

4.3.3 Théorème

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ bornée ; la suite (u_n) converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Attention

Ces trois théorèmes ne s'appliquent que si E est de dimension finie.

4.3.4 Distance à un fermé

Exercice

Soit E un espace normé de dimension finie ; soit A une partie de E non vide, fermée dans E ; soit b un élément de E ; on note $d = d(b, A)$.

Alors il existe un élément a de A tel que

$$\|a - b\| = d$$

Démonstration 1

Soit $(a_k) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $(d_k) = (\|a_k - b\|)$ converge vers $d = d(b, A)$.

$$\forall k \geq 0, \; \|a_k\| \leq \|b\| + \|a_k - b\| = \|b\| + d_k$$

Donc (a_k) est bornée dans E de dimension finie, donc possède une suite extraite $\left(a_{\varphi(k)}\right)$ convergeant vers une limite $a \in E$; A étant fermé dans E, $a \in A$.

$\|a - b\|$ est la limite de $\left(d_{\varphi(k)}\right)$, soit d.

Démonstration 2

Soit c un élément de A ; soit $r = \|c - b\|$; soit

$$K = A \cap \overline{B}(b, r)$$

K est borné, fermé (intersection de deux fermés) dans E espace normé de dimension finie, donc K est compact. Et K est non vide.

On note

$$d_1 = d(b, K)$$

On a déjà vu que

$$\exists a \in K,\ \|a - b\| = d_1$$

Soit x quelconque dans A.

- si $x \in K$, $\|x - b\| \geq \|a - b\|$ par définition de a.

- sinon, par définition de K, $\|x - b\| > r = \|c - b\| \geq \|a - b\|$ car $c \in K$.

Donc :

$$\forall x \in A,\ \|x - b\| \geq \|a - b\|$$

Conclusion, le point a répond à la question.

4.3.5 Distance à un fermé non atteinte

Exercice

Soit $I = [0, 1]$, $E = C^0(I, \mathbb{R})$ muni de $\|\|_\infty$ et

$$F = \left\{ f \in E / f(0) = 0,\ \int_I f \geq 1 \right\}$$

Montrer que F est fermé dans E ; trouver

$$d = d(0, F)$$

et montrer que d n'est pas atteinte.

Démonstration

Soit $u : f \to f(0)$ et $v : f \to \int_I f$; on montre que u et v sont continues :

$$\forall f \in E, |u(f)| \leq \|f\|_\infty$$

$$\forall f \in E, |v(f)| \leq \|f\|_\infty$$

Il en découle que F est une intersection de fermés de E :

$$F = u^{-1}(\{0\}) \cap v^{-1}([1, +\infty[)$$

On constate que :

$$\forall f \in F, 1 \leq \int_I f \leq \int_I |f| \leq \int_I \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Donc $1 \leq \|f\|_\infty$; mais l'inégalité est stricte car

$$\int_I (\|f\|_\infty - f) > 0$$

En effet, c'est l'intégrale d'une fonction positive continue non nulle.

On a donc montré que

$$\forall f \in F,\ \|f\|_\infty = \|f - 0\|_\infty = d(0, f) > 1$$

Pour terminer

Pour $n \geq 1$, on définit f_n par :
- $f_n(0) = 0$
- $f_n(t) = 1 + \frac{1}{n}$ si $t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$
- f_n affine sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$

On vérifie que :

$$\forall n \geq 1,\, 1 \leq \int_I f_n \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Conclusion

$d = d(0, F) = 1$, non atteinte.

4.4 Sous-espaces vectoriels

4.4.1 Théorème

Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace de dimension finie.

Alors F est fermé dans E.

Démonstration

Soit $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $a \in E$; (u_n) est bornée donc possède une valeur d'adhérence $b \in F$; mais dans E, (u_n) converge, donc elle admet une unique valeur d'adhérence dans E : a. Donc $a = b$.

Finalement, $a \in F$, ce qu'on voulait montrer.

4.4.2 Un exemple de sous-espace non fermé

Exercice

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$; soit $F = \{f \in E / \, f(0) = 0\}$; montrer que F n'est pas fermé dans $(E, \|\|_1)$.

Démonstration

$f_n(t) = nt$ si $t \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(t) = 1$ sinon.

$$\forall n \geq 1,\, \|f_n - 1\|_1 = \frac{1}{2n}$$

Montrer que pour tout g élément de E, la suite $(g_n) = (g.f_n)$ converge vers g ; conclusion ?

Réponse

$$\forall n \geq 1,\, \|g.f_n - g\|_1 \leq \frac{1}{2n} \|g\|_\infty$$

Conclusion : F est dense dans E.

F est-il fermé pour $\|\|_\infty$?

Oui, c'est le noyau de $f \to f(0)$ qui est continue.

4.5 Applications linéaires

4.5.1 Théorème

Si E est de dimension finie, $L(E, F) = L_C(E, F)$: toute application linéaire u dont l'espace de départ est de dimension finie est continue.

Démonstration

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E ; alors

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq c \|x\|_\infty$$

avec $c = \sum_{j=1}^{n} \|u(e_j)\|$ et $\|\|_\infty$ le maximum des valeurs absolues des coordonnées dans B.

4.5.2 Les applications polynomiales

Théorème

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $B = (e_1, ..., e_n)$ une base ; les formes linéaires coordonnées sont continues.

Il en est de même de toute combinaison linéaire de produit de formes linéaires coordonnées : les fonctions polynomiales.

Remarque

Notion indépendante de la base B.

4.5.3 Le déterminant

Théorème

Le déterminant est continu sur $M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$).

Rappel

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{j,\sigma(j)}$$

Exercice

Que dire de $GL_n(\mathbb{R})$, de $SL_n(\mathbb{R})$, de $SO(n)$?

Réponses

$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.
$SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.
$SO(n)$ est ouvert et fermé dans $O(n)$.

4.5.4 La comatrice

Exercice

Soit

$$\begin{array}{cccc} c: & M_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ & M & \rightarrow & \mathrm{com}(M) \end{array}$$

c est continue.

4.5.5 L'inverse

Exercice

$$\begin{array}{cccc} i: & GL_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ & M & \rightarrow & M^{-1} \end{array}$$

i est continue.

Démonstration

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} . (\mathrm{com} M)^T$$

Ce qui prouve que les fonctions composantes sont continues sur $GL_n(\mathbb{C})$.

4.5.6 Les applications multilinéaires

Lemme

Soit E_1 et E_2 deux espaces normés, qu'on ne suppose pas de dimensions finies.

Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ bilinéaire ; on suppose que

$$\exists c > 0, \forall (x, y) \in E_1 \times E_2, \|B(x, y)\| \leq c \|x\| . \|y\|$$

Alors B est continue.

Démonstration

On développe $B(a + u, b + v)$:

$$\forall (u, v) \in E_1 \times E_2, B(a + u, b + v) = B(a, b) + B(a, v) + B(u, b) + B(u, v)$$

D'où

$$\forall (u, v) \in E_1 \times E_2, \|B(a + u, b + v) - B(a, b)\| = \|B(a, v) + B(u, b) + B(u, v)\| \leq c(\|a\| . \|v\| + \|b\| . \|u\| + \|u$$

$$\forall (u, v) \in E_1 \times E_2, \|B(a + u, b + v) - B(a, b)\| \underset{t \to 0}{=} O(t)$$

où

$$t = \max(\|u\|, \|v\|) = \|(u, v)\|$$

Théorème

Toute application multilinéaire définie sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies est continue.

Démonstration

On suppose E_1 et E_2 de dimensions finies ; soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ bilinéaire ; à l'aide de bases, on montre l'existence de $c > 0$ tel que

$$\forall x \in E_1, \forall y \in E_2, \|B(x, y)\| \leq c \|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

On peut choisir

$$c = \sum_{i,j} \|B(e_i, f_j)\|$$

5 Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

5.1 Composantes connexes par arcs

A désigne une partie d'un espace normé E.

5.1.1 Chemin

Soit a, b deux éléments de A ; un chemin continu dans A de a à b est une application γ continue de $[0, 1]$ dans A telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

5.1.2 Recollement

Soit γ_1 un chemin dans A de a à b et γ_2 un chemin dans A de b à c.

Construire un chemin γ de a à c dans A.

Réponse

$\gamma(t) = \gamma_1(2t)$ si $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\gamma(t) = \gamma_2(2t - 1)$ si $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

5.1.3 Une relation d'équivalence sur A

On note $a \sim b$ s'il existe un chemin dans A de a à b. On vérifie qu'on définit ainsi une relation d'équivalence sur A.

- Réflexivité : chemin constant.
- Symétrie : $\gamma_1(t) = \gamma(1-t)$.
- Transitivité : recollement.

Définition

Les classes d'équivalence sont appelées composantes connexes par arcs.

Définition

On dit que A est connexe par arcs s'il existe une seule composante ; autrement dit, entre deux points quelconques de A, il existe un chemin dans A.

5.1.4 Etoilés

Définition

On dit que A est étoilé par rapport à a si :

$$\forall b \in A, [a,b] \subset A$$

Autrement dit :

$$\forall b \in A, \forall t \in [0,1], (1-t)\,a + t.b \in A$$

Définition

On dit que A est étoilé s'il existe un point par rapport auquel A est étoilé.

Théorème

Toute partie de A non vide convexe est étoilée ; toute partie de A étoilée est connexe par arcs.

5.1.5 Produit

Exercice

Le produit de deux connexes par arcs A_1 et A_2 est connexe par arcs.

Démonstration

Soit (a_1, a_2) et (b_1, b_2) deux éléments de $A_1 \times A_2$; soit γ_1 un chemin dans A_1 de a_1 à b_1 et γ_2 un chemin dans A_2 de a_2 à b_2 ; alors

$$t \to (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

est un chemin dans $A_1 \times A_2$ de (a_1, a_2) à (b_1, b_2).

5.2 Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$

5.2.1 Rappel

Les parties de $\mathbb{R}$ convexes sont les intervalles.

Démonstration

Soit $A \subset \mathbb{R}$ convexe ; supposons par exemple A majorée et non minorée ; soit $s = \sup A$; on montre alors que $A =]-\infty, s[$ ou $]-\infty, s]$.

5.2.2 Connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Théorème

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration

Soit $A \subset \mathbb{R}$ connexe par arcs ; soit $a, b \in A$; soit γ un chemin dans A de a à b.

$$[a, b] \subset \gamma([0, 1]) \subset A$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires ; donc A est convexe, c'est-à-dire un intervalle.

5.3 Image continue d'une partie connexe par arcs

5.3.1 Théorème

Soit A connexe par arcs, et $f \in C^0(A, F)$; alors $B = f(A)$ est connexe par arcs.

Démonstration

Soit $b_1 = f(a_1)$ et $b_2 = f(a_2)$ deux éléments de B ; soit γ un chemin dans A de a_1 à a_2.

$$f \circ \gamma$$

est alors un chemin dans B de b_1 à b_2.

5.3.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit A connexe par arcs, et $f \in C^0(A, \mathbb{R})$; alors $f(A)$ est un intervalle ; si $a < b < c$ et si f atteint les valeurs a et c, f atteint aussi la valeur b.

5.3.3 Les fonctions continues injectives

Théorème

Soit I un intervalle, et f continue et injective de I dans $\mathbb{R}$; alors f est strictement monotone.

Indication

Utiliser $A = \left\{(x, y) \in I^2 / \, x < y\right\}$ et φ définie sur A par

$$\varphi(x, y) = f(y) - f(x)$$

Démonstration

A est connexe par arcs car convexe.

- φ est continue et A connexe par arcs, donc $\varphi(A)$ est connexe par arcs.
- φ ne s'annule pas, car f est injective, donc $\varphi(A)$ est contenu dans $\mathbb{R}^*$.

$\varphi(A)$ est donc un intervalle contenu dans $\mathbb{R}^*$; donc φ est de signe constant, ce qui prouve que f est strictement monotone.

5.3.4 Exemples d'images réciproques de CPA

$\sin^{-1}(0)$ n'est pas connexe par arcs.
$f : x \to |x|$; $f^{-1}([1, 2])$ n'est pas connexe par arcs.

5.3.5 Les connexes

Exercice

Soit A connexe par arcs ; montrer que les seules parties B ouvertes et fermées dans A sont A et $\varnothing$. On dit alors que A est connexe.

Indication

Utiliser la fonction caractéristique de B : χ_B.

Démonstration

χ_B est continue sur A à valeurs dans $\{0,1\}$, or A est connexe par arcs, donc χ_B constante.

5.4 Exemples dans $\mathbb{R}^n$

5.4.1 Une ellipse

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

Montrer que A est connexe par arcs.

Réponse

A est l'image de $\mathbb{R}$ par $t \to (a\cos t, b\sin t)$.

5.4.2 Des hyperboles

$H_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x.y = 1\right\}$; $H_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$; montrer que H_1 et H_2 ne sont pas connexes par arcs.

Réponse

$L : (x,y) \to x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car ... ?

L'image de H_1 par L est ? L'image de H_2 par L est $\mathbb{R} \setminus \left]-a,a\right[$ qui n'est pas connexe par arcs.

5.4.3 $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs

Démonstration

C'est l'image de $\left]0,+\infty\right[\times \mathbb{R}$ par $(r,t) \to (r.\cos t, r.\sin t)$.

5.4.4 Généralisation

Soit P une partie finie de $\mathbb{R}^2$; montrer que $U = \mathbb{R}^2 \setminus P$ est connexe par arcs.

Démonstration

On fixe deux éléments a et b de U ; il existe une droite D passant par a contenue dans U ; il existe une droite D' passant par b contenue dans U non parallèle à D.

5.4.5 $E \setminus \{0\}$

Soit E un EVN de dimension $n \geq 2$. Montrer que $U = E \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.

Démonstration

Soit a et b deux éléments de U.

1er cas : (a,b) libre. Dans ce cas, un chemin dans U de a à b est :

$$t \to (1-t)\,a + t.b$$

2e cas : (a,b) liée. Dans ce cas, soit $c \in E \setminus \mathbb{R}a$.

(a,c) et (c,b) sont libres, et on est ramené au premier cas.

5.4.6 Sphères

Soit $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}^n$; on note

$$S^{n-1} = \{x \in E / \ \|x\|_2 = 1\}$$

Montrer que S^{n-1} est connexe par arcs.

Démonstration

S^{n-1} est l'image de $E \setminus \{0\}$ par

$$p : x \to \frac{x}{\|x\|_2}$$

5.4.7 Complémentaire d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Soit F un sous-espace de $E = \mathbb{R}^n$ et $U = E \setminus F$; U est-il connexe par arcs ?

Réponse

cas 1

$\dim F = n - 1$; F est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ.

$\varphi(U) = \mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, donc U non plus.

cas 2

$p = \dim F < n - 1$; soit $(e_1, e_2, ...e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $(e_1, e_2, ...e_n)$ de E ; on introduit

$$X = \mathbb{R}^p \times \left(\mathbb{R}^{n-p} - \{0\}\right)$$

et on montre que X est connexe par arcs.

5.5 Homéomorphismes

5.5.1 Définition

Un homéomorphisme f est une application continue bijective telle que f^{-1} est aussi continue.

Deux ensembles sont homéomorphes s'il existe entre eux un homéomorphisme.

5.5.2 Un exemple d'application continue bijective f telle que f^{-1} n'est pas continue ?

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi[&\to S^1 \\ t &\to e^{it} \end{aligned}$$

f^{-1} n'est pas continue car S^1 est compact, et son image $[-\pi, \pi[$ par f^{-1} ne l'est pas : elle n'est pas fermée dans $\mathbb{R}$.

Une formule pour f^{-1}

$$f^{-1}(z) = 2.\arctan \frac{y}{|z| + x} = 2.\arctan \frac{y}{1 + x}$$

Mais cette formule ne s'applique que sur $S^1 - \{-1\}$. Cette formule permet de trouver le seul point où f^{-1} n'est pas continue : c'est le point -1.

Justification de la formule

Soit $t \in \left]-\pi, \pi\right[$; soit $z = x + iy = e^{it}$.

$$x = \cos t = 2.\cos^2 \frac{t}{2} - 1,\ y = \sin t = 2.\sin \frac{t}{2}.\cos \frac{t}{2}$$

D'où

$$\frac{y}{1+x} = \tan \frac{t}{2}$$

Conclusion :

$$t = 2.\arctan \frac{y}{1+x}$$

Généralisation

Dans le cas général, si $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \left]-\infty, 0\right]$:

$$\operatorname{Arg}(z) = 2.\arctan \frac{y}{x + |z|} = 2.\arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

5.5.3 Trouver dans la liste suivante les ensembles homéomorphes

- $\mathbb{R}$
- $[0, +\infty[$
- $]0, 1[$
- $[0, 1]$
- $[0, 1[$
- $]0, 1]$
- $S^1 = \mathbb{U}$
- S^2
- $D = D_f(0,1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$
- $[-1, 1]^2$

Pour les deux derniers

Un homéomorphisme de $[-1, 1]^2$ sur D :

$$(x, y) \to \frac{\|(x,y)\|_\infty}{\|(x,y)\|_2}.(x, y)$$

6 Exercices dans $M_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$

6.1 Les bases

Soit $E = M_n(\mathbb{C})$; soit $A \in E$; soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$; les applications suivantes sont-elles continues sur E :

- $X \to A.X$
- $X \to P^{-1}.X.P$
- $X \to \mathrm{tr} X$
- $X \to \det X$
- $X \to \mathrm{rg}(X)$

Que dire de $p : (X, Y) \to X.Y$, $c : X \to X^2$, $c' : X \to {}^t X.X$?

Réponse

Le rang n'est pas continu car son image $\{0, 1, ..., n\}$ n'est pas connexe par arcs.

p est continue car bilinéaire définie sur un produit d'espaces normés de dimensions finies.

c est continue car composée d'applications continues :

$$c = p \circ f$$

avec $f : X \to (X, X)$.

De même pour c' avec $g : X \to ({}^t X, X)$.

6.2 Le polynôme caractéristique

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \, \chi_M = \det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} P_{j,\sigma(j)}$$

avec

$P_{i,j} = -m_{i,j}$ si $i \neq j$

$P_{i,j} = X - m_{i,j}$ si $i = j$

On vérifie que les n^2 fonctions $M \to P_{i,j}$ sont continues sur E et on en déduit la continuité sur E de

$$M \to \chi_M$$

6.3 $U = GL_n(\mathbb{C})$

U est un ouvert de $E = M_n(\mathbb{C})$, dense dans E, et connexe par arcs.

Indication

On montre d'abord que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles est connexe par arcs.

6.4 L'ensemble N des matrices nilpotentes

Etudier N, ensemble des matrices nilpotentes de $E = M_n(\mathbb{C})$.

6.4.1 Il est fermé dans E

Démonstration

C'est l'image réciproque de 0 par $X \to X^n$.

6.4.2 Il est d'intérieur vide

Démonstration

Il est contenu dans le complémentaire de $U = GL_n(\mathbb{C})$.

6.4.3 Il est connexe par arcs

Démonstration

Il est étoilé par rapport à 0.

6.5 L'ensemble D des matrices diagonalisables

Soit D l'ensemble des matrices diagonalisables de $E = M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$; qu'en dire ?

6.5.1 Il n'est pas ouvert

Démonstration

Utiliser $M_k = \frac{1}{k}.E_{1,2}$.

6.5.2 Il est dense dans E

Démonstration

Soit $A \in E$; soit $T \in T_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure semblable à A ; on construit une suite (T_k) de matrices diagonalisables convergeant vers T en modifiant un peu les coefficients diagonaux :

$$T_k(i,i) = T(i,i) + \frac{i}{k}$$

Autrement dit,

$$T_k = T + \frac{1}{k}D$$

où D est la matrice diagonale de diagonale $(1, 2, ..., n)$.

6.5.3 Il est connexe par arcs

Il est même...
étoilé par rapport à 0.

6.5.4 Son intérieur ?

Les matrices ayant n valeurs propres distinctes.

7 Exercices dans $M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$

7.1 $S_n(\mathbb{R})$ et $T_n(\mathbb{R})$

Propriétés topologiques ?

Réponse

Ce sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie ; ils sont donc fermés dans $M_n(\mathbb{R})$.

Sous-espaces stricts, donc d'intérieur vide dans $M_n(\mathbb{R})$, connexes par arcs car convexes.

7.2 $U = GL_n(\mathbb{R})$

U est un ouvert de $E = M_n(\mathbb{R})$, dense dans E, et non connexe par arcs.

Démonstration

L'image de U par det qui est continue n'est pas connexe par arcs, donc U ne l'est pas.

U est ouvert dans E car image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par det qui est continue.

Soit $A \in E$; soit

$$A_k = A - \frac{1}{k}I_n$$

A_k est inversible, sauf si $\frac{1}{k}$ est valeur propre de A.

7.3 $SL_n(\mathbb{R})$

C'est un fermé de $E = M_n(\mathbb{R})$, d'intérieur vide dans E, et connexe par arcs.

Que dire de $GL_n^+(\mathbb{R})$?

7.4 Projecteurs

$$P_n = \left\{M \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, M^2 = M\right\}$$

- C'est un fermé non borné d'intérieur vide.
- Points isolés : 0 et I_n.
- Composantes connexes par arcs : il y en a $n+1$.

7.5 L'ensemble D des matrices diagonalisables

Quelle est l'adhérence de l'ensemble D des matrices diagonalisables de $E = M_n(\mathbb{R})$?

L'ensemble des matrices trigonalisables.

7.6 $O_n(\mathbb{R})$

Rappel :

$$O_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tM.M = I_n \right\}$$

Est-il compact, connexe par arcs ?

Réponse

$O(n)$ est donc fermé dans $E = M_n(\mathbb{R})$; il est de plus borné, car si M est une matrice orthogonale,

$$\|M\|^2 = \operatorname{tr}\left(M^T.M\right) = n$$

Conclusion : $O(n)$ est compact.

Il n'est pas connexe par arcs, car son image par le déterminant $\{-1, 1\}$ ne l'est pas.

7.7 $SO_n(\mathbb{R})$

Rappel : $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$; il est donc compact. Montrons qu'il est connexe par arcs.

Soit

$$R : \theta \to R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$SO_2(\mathbb{R})$ est l'image de $\mathbb{R}$ connexe par arcs par R continue, donc $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Cas général : on sait que toute matrice $M \in SO_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice D diagonale par blocs, dont les blocs sont des matrices $R(\theta_j)$, plus un bloc de taille 1 si n est impair...

On utilise

$$f : t \to \operatorname{diag}\left(R(t.\theta_1), ..., R(t.\theta_r)\right)$$

$f(0) = I_n$ et $f(1) = D$.

8 Exercices sur la suite $\left(A^k\right)$

Soit $A \in E = M_n(\mathbb{C})$; on note $\rho(A) = \max\{|\lambda| \,/\, \lambda \in Sp(A)\}$: le rayon spectral.

8.1 $L \in \mathbb{C}[A]$

Si $\left(A^k\right)$ converge vers L, alors $L \in \mathbb{C}[A]$, et L est un projecteur.

Démonstration

$$\forall k \geq 0, A^{2k} = A^k.A^k$$

$\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, il est donc fermé dans E.

8.2 Convergence de la série

La suite $\left(A^k\right)$ converge vers 0 si et seulement si $\sum A^k$ converge.

Démonstration

Supposons que $\left(A^k\right)$ converge vers 0.

$$\forall k \geq 0, (I_n - A) \sum_{j=0}^{k} A^j = I_n - A^{k+1}$$

A partir d'un certain rang k_0, $I_n - A^{k+1}$ est inversible, ce qui prouve que $I_n - A$ est inversible.

De plus :

$$\forall k \geq 0, \sum_{j=0}^{k} A^j = (I_n - A)^{-1} . \left(I_n - A^{k+1}\right)$$

Conclusion : la série converge, et sa somme est $(I_n - A)^{-1}$.

8.3 Convergence vers 0

La suite $\left(A^k\right)$ converge vers 0 si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Démonstration

On fixe une norme quelconque sur E.

Cas particulier

Supposons $A = \lambda I_n + N$ avec $|\lambda| < 1$ et N nilpotente.

$$\forall k \geq 0, A^k = \sum_{q=0}^{n} \binom{k}{q} \lambda^{k-q} N^q$$

D'où :

$$\forall k \geq 0, \left\|A^k\right\| \leq \sum_{q=0}^{n} \binom{k}{q} |\lambda|^{k-q} \|N^q\| = M(k)$$

Que dire de la fonction suivante :

$$f : k \to f(k) = \sum_{q=0}^{n} \binom{k}{q}$$

C'est une fonction polynomiale de degré n.

Ou plus généralement de

$$g : k \to g(k) = \sum_{q=0}^{n} c_q \binom{k}{q}$$

C'est une fonction polynomiale de degré au plus n.

Retour à la démonstration :

$$\forall k \geq 0, \left\|A^k\right\| \leq M(k) = P(k) . |\lambda|^k$$

On termine avec le théorème sur les croissances comparées.

Cas général

On sait que toute matrice $A \in E$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, les blocs étant de la forme étudiée dans le cas particulier.

8.4 Bornée

Supposons $A = \lambda I_n + N$; à quelle condition la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

Réponse

$|\lambda| < 1$, ou $|\lambda| = 1$ et $N = 0$.

Supposons par exemple $\lambda = 1$, $A = I_n + N$, et $\left(A^k\right)$ bornée ; soit $X \in \ker N^2$

$$\forall k \geq 0, A^k X = X + k.NX$$

donc $NX = 0$; conclusion ?

Cas général

A quelle condition la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

Réponse

$\rho(A) \leq 1$, et pour toute valeur propre λ de module 1, la multiplicité m_λ est égale à la dimension du sous-espace propre.

8.5 Bornée sur $\mathbb{Z}$

A quelle condition la suite $\left(A^k\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ est-elle bornée ?

Réponse

A diagonalisable, et $Sp(A) \subset U$.

8.6 Convergence

A quelle condition la suite $\left(A^k\right)$ est-elle convergente ?

Réponse

A est semblable à $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, avec $\rho(B) < 1$ et $0 \leq r \leq n$.

9 Complément : le théorème de Perron Frobenius

Notations : pour deux matrices de mêmes dimensions A et B, on note $A \leq B$ si

$$\forall i, j,\ a_{i,j} \leq b_{i,j}$$

et $A < B$ si

$$\forall i, j,\ a_{i,j} < b_{i,j}$$

On note

$$C_1 = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} / X \geq 0\}$$
$$K_1 = \{X \in C_1 / \|X\|_1 = 1\}$$

et

$$C_2 = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) / X > 0\}$$
$$K_2 = A(K_1)$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$; on suppose $A > 0$. Pour $X \in C_1$, on pose

$$R(X) = \{t \geq 0 / tX \leq AX\}$$

et

$$r(X) = \max R(X)$$

1- Que dire de AX si $X \in C_1$?

2- Pour $X \in C_1$, montrer que $r(X)$ est bien défini. Montrer que $r(uX) = r(X)$ si $u \in]0, +\infty[$.

3- Pour $X \in C_1$, comparer $r(X)$ et $r(AX)$.

4- Montrer que r est continu sur C_2. On pourrait montrer que r est continu sur C_1, mais ce n'est pas nécessaire, et plus délicat.

5- Soit

$$\lambda = \sup_{K_2} r$$

Montrer que λ est bien défini et que c'est un maximum.

6- Montrer que

$$\lambda = \sup_{C_1} r = \sup_{C_2} r$$

7- Montrer $\lambda \in \mathrm{Sp}A$.

8- Montrer que $\lambda = \rho(A)$.

Indications

1- Si $X \in C_1$, $AX \in C_2$.

2-

$$r(X) = \min \left\{ \frac{(AX)_j}{x_j} / \, x_j > 0 \right\}$$

3- Soit $Y = AX$; on montre que $R(X) \subset R(Y)$; d'où $r(X) \leq r(Y)$.

4- Avec la formule de la question 2.

5- r est continu sur K_2 compact, car $K_2 \subset C_2$.

6- Soit $X \in C_1$; notons

$$X_1 = \frac{X}{\|X\|_1} \in K_1, \; Y_1 = A.X_1 \in K_2$$

Alors :

$$r(X) = r(X_1) \leq r(Y_1) \leq \lambda$$

7- Soit $X \in K_2$ tel que $r(X) = \lambda$. Soit $Y = AX$. On sait que $\lambda X \leq AX$; supposons $\lambda X \neq AX$. Avec la question 1 :

$$A(AX - \lambda X) > 0$$

On obtient donc $\lambda Y < AY$; on en déduit que $r(Y) > \lambda$; contradiction.

8- Soit Z un vecteur propre associé à une valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$; notons $X = |Z|$; de $\mu Z = AZ$, on déduit

$$|\mu| \, X \leq AX$$

Donc

$$|\mu| \leq r(X) \leq \lambda$$

Pour en savoir plus

Mines Ponts 2006, Epreuve 1 MP.