Réduction des endomorphismes

Contents

Part I

Polynôme caractéristique, polynôme minimal.

1 Trace, matrices semblables

1.1 Matrices semblables

1.1.1 Définition

Endomorphisme m canoniquement associé à une matrice carrée $M \in M_n(K)$: c'est l'endomorphisme de K^n dont M est la matrice dans la base canonique.

1.1.2 Définition

Soit $A, B \in M_n(K)$; on dit qu'elles sont semblables si

$$\exists P \in GL_n(K), B = P.A.P^{-1}$$

1.1.3 Propriété

Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $M_n(K)$.

1.1.4 Changement de base

Soit $u \in L(E)$; soit M sa matrice dans la base B, et M' sa matrice dans la base B' ; alors

$$M' = P^{-1}.M.P$$

où P est la matrice de passage de B à B'.

Corollaire

Deux matrices carrées sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases B et B'.

1.2 Trace

1.2.1 Définition

Soit $A \in M_n(K)$; on note

$$\mathrm{tr}A = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}$$

La trace est une forme linéaire sur $M_n(K)$.

1.2.2 $\mathrm{tr}(AB)$

Théorème

$$\forall A \in M_{p,q}(K), \forall B \in M_{q,p}(K), \mathrm{tr}(A.B) = \mathrm{tr}(B.A)$$

Attention, $\mathrm{tr}(A.B)$ n'est pas toujours égal à $\mathrm{tr}(A).\mathrm{tr}(B)$.

Démonstration

Soit $A \in M_{p,q}(K)$, $B \in M_{q,p}(K)$; soit $C = AB$ et $D = BA$.
Rappel :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$$

$$\mathrm{tr} C = \sum_{i=1}^{p} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} b_{j,i}$$

De même :

$$\mathrm{tr} D = \sum_{j=1}^{q} d_{j,j} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} b_{j,i}$$

car la multiplication est commutative ; ensuite on permute les deux $\sum$.

Remarque

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$$

pourvu que les produits aient un sens.

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BAC)\,?$$

Pas forcément.

1.2.3 Exemple, les matrices de rang 1

Soit $X, Y \in M_{n,1}(K) \setminus \{0\}$; soit $A = X.Y^T$.

$$\mathrm{tr} A = \mathrm{tr} X.Y^T = \sum_{j=1}^{n} x_j.y_j = X^T.Y = Y^T.X$$

1.2.4 tr$(M.E_{i,j})$

Rappel

Que vaut le produit $E_{i,j}.E_{k,l}$?
$E_{i,j}.E_{k,l} = 0$ si $j \neq k$ et $E_{i,l}$ si $j = k$.

Exercice

Soit $M \in M_n(K)$; montrer que :

$$\forall i, j,\ \mathrm{tr}(M.E_{i,j}) = \mathrm{tr}(E_{i,j}.M) = m_{j,i}$$

En déduire que :

$$(P) : \forall X \in M_n(K), \mathrm{tr}(M.X) = 0 \Longrightarrow M = 0$$

Autre méthode pour (P) si $K = \mathbb{R}$?

Supposons que $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(M.X) = 0$; alors

$$0 = \mathrm{tr}\left({}^t M.M\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$$

Donc $M = 0$.

1.2.5 tr et det

Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.

Démonstration

$\text{tr}\left(P^{-1}.M.P\right) = \text{tr}\left(M.P.P^{-1}\right) = \text{tr}M.$

Attention, on ne peut pas écrire $\text{tr}\left(P^{-1}.M.P\right) = \text{tr}\left(M.P^{-1}.P\right)$.

1.2.6 Trace d'un endomorphisme

Définition

On suppose que E est de dimension finie ; soit $u \in L(E)$; la trace de la matrice de u est la même dans toute base, c'est par définition la trace de u.

1.2.7 Les matrices de trace nulle

Exercice

Montrer que les matrices de trace nulle de $M_n(K)$ constituent un espace vectoriel ; trouver sa dimension et une base.

Réponse

C'est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc un hyperplan de $M_n(K)$, donc de dimension $n^2 - 1$.

Une base :

$$(E_{i,j})_{i \neq j} \cup (E_{1,1} - E_{i,i})_{2 \leq i \leq n}$$

1.3 Exemples de matrices semblables

1.3.1 Exemple 1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

1.3.2 Exemple 2

Soit $a \neq 0$; $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $M' = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

Réponse

Soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $E = K^2$; soit m l'endomorphisme canoniquement associé à M ; alors M' est la matrice de m dans la base $B' =$?

$$B' = (e_1, a.e_2)$$

1.3.3 Exemple 3

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ et $A' = \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

Réponse

$B' = (e_2, e_1)$.

1.3.4 Exemple 4

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ et $A' = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

Réponse

En général, elles n'ont pas la même trace.

1.3.5 Exemple 5

$E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ sont-elles semblables ?

Réponse

Elles sont semblables si elles ont la même trace, 0 ou 1. En effet, soit m canoniquement associé à $E_{i,j}$.

- cas où $i = j$; $m(e_i) = e_i$; m est représenté par $E_{1,1}$ dans la base $(e_i, ...)$.

- cas où $i \neq j$; $m(e_j) = e_i$; m est représenté par $E_{1,2}$ dans la base $(e_i, e_j, ...)$.

1.3.6 Exemple 6

Soit $M \in M_3(\mathbb{R}) - \{0\}$ telle que $M^3 = 0$.

Montrer que M est semblable à

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou à } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Démonstration

Soit m l'endomorphisme canoniquement associé à M.

1er cas

$m^2 \neq 0$; soit a tel que $m^2(a) \neq 0$; on montre alors que $\left(a, m(a), m^2(a)\right)$ est libre.

On choisit $e_3 = a$, $e_2 = m(e_3)$, $e_1 = ?$

2e cas

$m^2 = 0$; $\mathrm{Im}(m) \subset \ker m$; m ne peut donc être que de rang 1.

On choisit d'abord e_1 dans $\mathrm{Im}(m) - \{0\}$, et e_2 tel que $m(e_2) = e_1$.

1.4 Réduction des matrices de rang 1

1.4.1 Exercice

Soit $M \in M_n(K)$ de rang 1, et $t = tr(M)$.

Si $t = 0$, M est semblable à $E_{2,1}$; sinon, M est semblable à $t.E_{1,1}$.

1.4.2 Démonstration

$D = \mathrm{Im}\, m$ est une droite ; $H = \ker m$ est un hyperplan.

1er cas

$D \oplus H = E$.

2e cas $D \subset H$. On fixe e_2 base de D, puis e_1 tel que $m(e_1) = e_2$; ensuite on complète (e_2) en une base $(e_2, ..., e_n)$ de $\ker m$.

1.4.3 Que dire des $E_{i,j}$ pour $i \neq j$?

Elles sont semblables d'après ce qui précède, ce qu'on savait déjà.

1.5 Matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$

Exercice

Deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ le sont dans $M_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$; on les suppose semblables dans $M_n(\mathbb{C})$; soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B = P^{-1}.A.P$$

Donc $P.B = A.P$.

Ecrivons $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in M_n(\mathbb{R})$; on en déduit facilement $P_1.B = A.P_1$ et $P_2.B = A.P_2$; puis, si on note

$$M_t = P_1 + t.P_2$$

alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_t.B = A.M_t$$

Il reste à montrer l'existence de $t \in \mathbb{R}$ tel que M_t soit inversible ; comment ?

Réponse

$$Q : t \to \det(M_t) = \det(P_1 + t.P_2)$$

est une fonction polynomiale telle que $Q(i) \neq 0$; donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $Q(t) \neq 0$.

2 Sous-espace stable par un endomorphisme

2.1 Définitions

Sous-espace stable

Soit $u \in L(E)$; soit F un sous-espace vectoriel de E ; on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Endomorphisme induit par u sur F

Dans le cas où F est stable par u, l'endomorphisme $u' \in L(F)$ induit par u est simplement défini par

$$\forall x \in F, u'(x) = u(x)$$

Sous-espace invariant

Soit $u \in L(E)$; soit F un sous-espace vectoriel de E ; on dit que F est invariant par u si $u(F) = F$.

2.1.1 Exercice

Que peut-on dire de la somme, de l'intersection, de la réunion de deux sous-espaces vectoriels stables par u ?

Réponse

Ils sont stables par u.

2.1.2 Exercice

Si F est stable par f et g, est-il stable par $f + g$? par $f \circ g$?

2.1.3 Base adaptée

On suppose toujours F sous-espace de E stable par u ; on suppose de plus E est de dimension finie ; soit $B_1 = (e_1, ..., e_r)$ une base de F que l'on complète en une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E.

Que dire de $M_B(u)$?

Réponse

$M_B(u) = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$, où $A = ?$

A est la matrice dans B_1 de l'endomorphisme induit par u sur F.

2.2 Matrices triangulaires supérieures

2.2.1 Dimension

$T_n(K)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$; une base :

$$(E_{i,j})_{1 \le i \le j \le n}$$

2.2.2 Caractérisation

Soit $E = K^n$; $B = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique ; $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$; m canoniquement associé à une matrice carrée M.

Dans ces conditions, $M \in T_n(K)$ si et seulement si les E_k sont stables par m : $m(E_k) \subset E_k$ pour $1 \le k \le n$.

Remarque

Il en découle que $T_n(K)$ est stable pour la multiplication.

En résumé, $T_n(K)$ est une sous-algèbre de $M_n(K)$.

2.2.3 Lemme : stable et invariant

Soit F un sous-espace de dimension finie de E ; soit $u \in GL(E)$; si F est stable par u, alors $u(F) = F$.

Démonstration

L'endomorphisme u' induit par u sur F est injectif, car $\ker u' = F \cap \ker u = \{0\}$. F étant de dimension finie, u' est bijectif.

2.2.4 Cas de M^{-1}

Théorème

Si M est triangulaire supérieure inversible, M^{-1} est également triangulaire supérieure.

Démonstration 1

Dans ce cas, $m(E_k) = E_k$ pour $1 \le k \le n$; donc $m^{-1}(E_k) = E_k$ pour $1 \le k \le n$.

Démonstration 2

L'application linéaire

$$f : X \to MX$$

est un endomorphisme injectif de $T_n(K)$ qui est de dimension finie, donc f est un automorphisme de $T_n(K)$.

Et M^{-1} est l'antécédent de I_n.

2.2.5 Stable mais non invariant par un automorphisme

Exercice

Trouver $u \in GL(E)$ et F sous-espace de E, tels que F est stable par u, mais pas par u^{-1}.

Réponse

$E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; T défini par $T(f)(x)=f(x-1)$; F : l'ensemble des fonctions nulles sur $]-\infty,0[$.

2.3 Vecteurs propres

2.3.1 Définition

Soit $u\in L(E)$; soit x un vecteur non nul ; on dit que x est un vecteur propre si

$$\exists\lambda\in K, u(x)=\lambda.x$$

Remarque

x est un vecteur propre si et seulement si la droite engendrée par x est stable par u.

2.3.2 Caractérisation des homothéties

Exercice important

Soit $u\in L(E)$; on suppose que toute droite de E est stable par u, ou que tout vecteur non nul est vecteur propre ; que dire de u ?

Réponse

u est une homothétie.

Démonstration

On sait que

$$\forall x\in E,\exists\lambda\in K, u(x)=\lambda.x$$

On fixe $a\in E$ non nul ; soit $\lambda\in K$ tel que $u(a)=\lambda.a$; on va montrer que

$$\forall x\in E, u(x)=\lambda.x$$

- si $x=t.a$:

$$u(x)=u(t.a)=t.u(a)=t.\lambda.a=\lambda.x$$

- si (a,x) est libre :
$u(a)=\lambda.a$, $u(x)=\lambda'.x$, $u(a+x)=\lambda''.(a+x)$, donc

$$\lambda.a+\lambda' x=\lambda''.(a+x)$$

donc :

$$(\lambda-\lambda'').a+(\lambda'-\lambda'').x=0$$

Or (a,x) est libre, donc $\lambda=\lambda'=\lambda''$.

2.4 Dérangements

Exercice

On appelle dérangement une permutation sans point fixe ; on note d_n le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$ et $d_0=1$.

Montrer que

$$\forall n\geq 0,\ n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k$$

En déduire que

$$\forall n\geq 0,\ d_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Réponse

Fixons $n \geq 1$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$u: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \to & P(X+1) \end{array}$$

Soit M la matrice de u dans la base canonique de E ; on constate que

$$(d_0, d_1, ...d_n).M = (0!, 1!, ..., n!)$$

D'où

$$(d_0, d_1, ...d_n) = (0!, 1!, ..., n!).M^{-1}$$

2.5 Trace nulle

Exercice

(P_n) : Soit $A \in M_n(K)$ de trace nulle ; alors A est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

Démonstration

Par récurrence sur n.
- C'est clair pour $n = 1$.
- Soit $n \geq 2$; supposons (P_{n-1}) et montrons (P_n) :

1er cas $A \in K.I_n$. Dans ce cas, $A = 0$.

2e cas $A \notin K.I_n$; notons a l'endomorphisme canoniquement associé à A : $M_B(a) = A$; d'après ce qui précède, on peut trouver un vecteur e_1 tel que $(e_1, a(e_1))$ soit libre ; on note alors $e_2 = a(e_1)$.

Ensuite, on complète en une base $B_1 = (e_1, ..., e_n)$; $A_1 = M_{B_1}(a)$ est donc de trace nulle ; il faut ensuite appliquer l'hypothèse de récurrence...

3 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

3.1 Sous-espace propre, valeur propre

Définition

Soit $u \in L(E)$; soit $\lambda \in K$; on note

$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda.\mathrm{Id})$$

Les $E_\lambda(u)$ sont appelés les sous-espaces propres de u.

Définition

On dit que λ est une valeur propre de u si $E_\lambda(u) \neq \{0\}$; donc λ est une valeur propre de u si

$$\exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x$$

Définition

Si E est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u.

Dans ce cas :

$$\mathrm{Sp}u = \{\lambda \in K / \det(u - \lambda.\mathrm{Id}) = 0\}$$

3.2 Polynômes d'un endomorphisme

3.2.1 Définition

Soit $u \in L(E)$; on pose $u^0 = \mathrm{Id}$; soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k.X^k \in K[X]$; on pose

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k.u^k$$

Donc

$$P(u) : x \to (P(u))(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k.u^k(x)$$

Que dire de $P(u(x))$?

3.2.2 Un morphisme d'algèbres

$$\varphi : \begin{cases} K[X] \to L(E) \\ P \to P(u) \end{cases}$$

En particulier :

$$\forall P, Q \in K[X], (P.Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

$\ker P(u)$ et $\ker Q(u)$ sont contenus dans $\ker (P.Q)(u)$.

3.3 Lemme de décomposition des noyaux

3.3.1 Théorème

Soit $u \in L(E)$ et $r \geq 2$.

Si $P_1, P_2, ..., P_r$ sont des éléments de $K[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à R, alors :

$$\ker R(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)$$

Démonstration

On suppose $r = 2$ et $P \wedge Q = 1$; on note $R = P.Q$.

Soit $A, B \in K[X]$ tels que $A.P + B.Q = 1$; alors

$$A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u) = \mathrm{Id}$$

1e étape

Soit $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$; alors, $x = 0 + 0 = 0$.

2e étape

Soit $x \in \ker R(u)$;

$$x = A(u) \circ P(u)(x) + B(u) \circ Q(u)(x)$$

Donc x s'écrit $x = y + z$ avec $y \in \ker P(u)$ et $z \in \ker Q(u)$:

$y = B(u) \circ Q(u)(x)$

$z = A(u) \circ P(u)(x)$

En effet :

$$P(u)(y) = P(u)(B(u) \circ Q(u)(x)) = B(u) \circ P(u) \circ Q(u)(x) = B(u)(0) = 0$$

3.3.2 Projecteurs

Soit $p \in L(E)$ tel que $p^2 = p$; on dit que p est un projecteur ; appliquer le lemme.

Réponse

$R = X^2 - X = X.(X-1)$

$$E = \ker R(p) = \ker p \oplus \ker(p - \mathrm{Id}) = E_0(p) \oplus E_1(p)$$

On peut aussi montrer qu'ici l'ensemble des vecteurs invariants $\ker(p - \mathrm{Id})$ est l'image de p.

On dit que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}p$, parallèlement à $\ker p$; un dessin !

3.3.3 Symétries

Soit $s \in L(E)$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}$; on dit que s est une symétrie, ou involution ; appliquer le lemme.

Réponse

$P = X^2 - 1 = (X+1).(X-1)$;

$$E = \ker(s + \mathrm{Id}) \oplus \ker(s - \mathrm{Id}) = E_{-1}(s) \oplus E_1(s)$$

On dit que s est la symétrie par rapport à $E_1(s)$, parallèlement à $E_{-1}(s)$; un dessin !

3.3.4 Fonctions paires et impaires

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; montrer que les fonctions paires et les fonctions impaires constituent deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

Réponse

On peut utiliser T défini sur E par $(T(f))(x) = f(-x)$; on constate que $T^2 = \mathrm{Id}$.

3.3.5 Matrices symétriques

Soit $E = M_n(K)$; soit

$$t : M \to^t M$$

t est un endomorphisme involutif ; donc $S_n(K)$ (matrices symétriques) et $A_n(K)$ (matrices antisymétriques) sont deux sous-espaces supplémentaires dans E.

3.4 Somme de sous-espaces propres

3.4.1 Théorème

Soit $u \in L(E)$.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres de u est directe.

Démonstration

Soit $\lambda_1, ..., \lambda_q$ des valeurs propres distinctes de u ; les $P_j = X - \lambda_j$ sont deux à deux premiers entre eux ; soit P leur produit.

$$\ker P(u) = \bigoplus_{j=1}^{q} \ker P_j(u) = \bigoplus_{j=1}^{q} E_{\lambda_j}(u)$$

En particulier, la somme est directe.

3.4.2 Lemme

Soit $E_1, ..., E_q$ des sous espaces de E en somme directe ; pour tout j, soit $x_j \in E_j - \{0\}$.

Alors $(x_1, x_2, ...x_q)$ est libre.

Démonstration

Supposons que

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j . x_j = 0$$

La somme étant directe :

$$\forall j, \lambda_j . x_j = 0$$

Les x_j étant non nuls :

$$\forall j, \lambda_j = 0$$

Conclusion : la famille $(x_1, x_2, ... x_q)$ est libre.

3.4.3 Théorème

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

3.4.4 Exemple 1

$K = \mathbb{C}$.

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \rightarrow & e^{\lambda x} \end{array}$$

Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est libre.

3.4.5 Exemple 2

$K = \mathbb{R}$.

$$g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \cos nx \end{array}$$

Montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

3.4.6 Exemple 3

$0 \leq a < b$; $I =]a, b[$; $K = \mathbb{R}$.

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & x^\lambda \end{array}$$

Montrer que $(h_\lambda)_{\lambda \in]0, +\infty[}$ est libre.

Cas particulier où $a = 0$.

Démonstration

$E = C^\infty(I, \mathbb{R})$ et u est défini par $(u(f))(x) = x.f'(x)$.

3.5 Stabilité

3.5.1 Théorème

Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.

Remarque : c'est vrai aussi pour l'image.

3.5.2 Exercice

Soit $u \in L(E)$; on suppose E de dimension finie ; s'il existe une droite stable par u, alors il existe un hyperplan stable par u.

Démonstration

Soit λ une valeur propre de u ; soit H un hyperplan contenant $\mathrm{Im}(u - \lambda.\mathrm{Id})$; alors, H est stable par u.

3.6 Cas des matrices

3.6.1 Définition

Soit $M \in M_n(K)$; soit m l'endomorphisme canoniquement associé à M ; le rang, le noyau, l'image, les éléments propres, le spectre de M sont ceux de m.

3.6.2 Changement de corps

Si K' est un sous-corps de K, et si $M \in M_n(K')$, il y a deux endomorphismes canoniquement associés à M : m_K et $m_{K'}$; dans ce cas,

$$sp_{K'}(M) \subset sp_K(M)$$

4 Polynôme caractéristique

4.1 Définition

Rappel

Si E est de dimension finie, et $u \in L(E)$, alors

$$\mathrm{Sp}u = \{\lambda \in K / \det(u - \lambda.\mathrm{Id}) = 0\}$$

D'où la définition :

Définition

Soit $M \in M_n(K)$; on pose

$$\chi_M = \det(XI_n - M)$$

appelé polynôme caractéristique de M.

χ_M est le déterminant d'une matrice carrée à coefficients dans le corps $L = K(X)$.

Remarque

λ est valeur propre de M
si et seulement si $\mathrm{Ker}(\lambda.I_n - M)$ est non réduit à 0,
si et seulement si $\det(\lambda.I_n - M) = 0$.

4.1.1 Cas de la dimension 2

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$; χ_A ?

Réponse

$\chi_A(X) = X^2 - tX + \delta$.

4.1.2 Matrice triangulaire

$$\chi_A(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - a_{j,j})$$

4.1.3 Transposée

A et A^T ont le même polynôme caractéristique. car $XI_n - A$ et $XI_n - A^T$ ont le même déterminant.

4.1.4 Matrice compagnon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & . & & & -a_1 \\ & . & . & & . \\ & & . & 0 & . \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Réponse

$L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + ... + X^{n-1}L_n$; ou pivot de Gauss usuel ; on obtient

$$\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$$

4.2 Cas d'un endomorphisme

On suppose désormais E de dimension finie.

Théorème

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique ; si $u \in L(E)$, on pose $\chi_u = \chi_A$, où A est la matrice de u dans n'importe quelle base.

Démonstration

Si $B = P^{-1}.A.P$, alors

$$X.I_n - B = X.I_n - P^{-1}.A.P = P^{-1}.(X.I_n - A).P$$

Donc $\chi_A = \chi_B$.

4.3 Quelques coefficients du polynôme caractéristique de $A \in M_n(K)$

4.3.1 Degré

$$\chi_A(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - a_{j,j}) + Q(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + ... + c_1X + c_0$$

avec $\deg Q \leq n-2$.

4.3.2 Terme constant

$c_0 = (-1)^n \det A$

4.3.3 Coefficient de X^{n-1}

C'est le même que pour le polynôme $\prod_{j=1}^{n}(X - a_{j,j})$; $c_{n-1} = -\mathrm{tr}A$.

4.3.4 Exercice : le coefficient de X

Notons $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(K)$: $I_n = [E_1, ..., E_n]$; notons $(A_1, ..., A_n)$ les colonnes de A : $A = [A_1, ..., A_n]$.

$$\chi_A(X) = \det[X.E_1 - A_1, ..., X.E_n - A_n]$$

En utilisant la n-linéarité, on obtient n termes de degré 1 : $\det[X.E_1, -A_2, -A_3, ..., -A_n]$,...

Conclusion

$$c_1 = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(\mathrm{com}\,A)$$

4.4 Racines du polynôme caractéristique

4.4.1 Théorème

Les racines du polynôme caractéristique de u sont ses valeurs propres.

4.4.2 Définition

Soit $u \in L(E)$; soit $\lambda \in Sp(u)$; on appelle multiplicité de la valeur propre λ la multiplicité m_λ de λ comme racine de χ_u.

4.4.3 Exemple 1

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$; soit $u \in L(E)$.
Alors u a au moins une valeur propre.

4.4.4 Exemple 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ impaire ; soit $u \in L(E)$.
Alors u a au moins une valeur propre.

4.4.5 Exemple 3

Un exemple où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, $u \in L(E)$ et u n'a pas de valeur propre.

Réponse

$E = \mathbb{C}[X]$ et $u(P) = X.P(X)$.

4.4.6 Exemple 4

Un exemple où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in L(E)$ et u n'a pas de valeur propre.

Réponse

$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4.5 Cas d'un endomorphisme induit

4.5.1 Théorème

Soit $u \in L(E)$; soit F un sous-espace stable par u ; soit v l'endomorphisme de F induit par u ; alors χ_v divise χ_u.

Démonstration

Dans une base adaptée, $M_B(u) = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$; $\chi_u = \chi_A.\chi_D$ et $\chi_v = \chi_A$.

4.5.2 Théorème

Soit $u \in L(E)$; soit λ une valeur propre de u ; alors

$$\dim E_\lambda \leq m_\lambda$$

Démonstration

Soit $d = \dim E_\lambda$; dans une base adaptée, $M_B(u) = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$, avec $A = \lambda.I_d$.

Un exemple où $\dim E_\lambda < m_\lambda$

$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4.5.3 Remarque

Si $m_\lambda = 1$?

4.6 Polynômes caractéristiques de AB et BA

Exercice

On suppose $\dim E = p$, $\dim F = q$, $p \leq q$, $u \in L(E,F)$, $v \in L(F,E)$; montrer que

$$\chi_{u \circ v} = X^{q-p}.\chi_{v \circ u}$$

Réponse

On choisit B base de E et B' base de F telles que $M_{B,B'}(u) = J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On écrit $M_{B',B}(v) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$; alors

$$M_{B'}(u \circ v) = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$M_B(v \circ u) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

5 Complément : localisation des valeurs propres

5.1 Matrices à diagonale dominante

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$; notons

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

On dit que A est à diagonale strictement dominante si

$$\forall i \in [1,n], |a_{i,i}| > r_i$$

Dans ce cas, A est inversible.

Démonstration

Soit $x \in \ker A$: $A.x = 0$; choisissons i tel que

$$|x_i| = \|x\|_\infty$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0$$

Donc

$$a_{i,i}.x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}.x_j$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|a_{i,i}| . \|x\|_\infty \leq r_i. \|x\|_\infty$$

ce qui n'est possible que si $\|x\|_\infty = 0$.

Conclusion : $\ker A = 0$.

5.2 Localisation des valeurs propres

Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$; notons

$$r_i = \sum_{j \neq i} |b_{i,j}|$$

Le spectre de B est contenu dans la réunion des disques fermés $\overline{D}(b_{i,i}, r_i)$.

Démonstration

Soit λ une valeur propre de B ; $A = B - \lambda.I_n$ n'est pas inversible, donc n'est pas à diagonale strictement dominante :

$$\exists i, |b_{i,i} - \lambda| \leq r_i$$

5.3 Cas où $A \in M_n(\mathbb{R})$

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, et si

$$\forall i \in [1, n], a_{i,i} > r_i$$

alors $\det A > 0$.

Démonstration

$\chi_{-A} : t \to \det(t.I_n + A)$ ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$, et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

6 Polynôme minimal

Ici, E n'est plus supposé de dimension finie.

6.1 Introduction

6.1.1 Rappel : un morphisme d'algèbres

Soit $u \in L(E)$; soit

$$\varphi : \begin{cases} K[X] \to L(E) \\ P \to P(u) \end{cases}$$

Il s'agit d'un morphisme d'algèbres ; son noyau est appelé l'idéal annulateur de u.

6.1.2 Image

$\mathrm{Im}\varphi$ est notée $K[u]$; c'est une sous-algèbre commutative de $L(E)$.

6.1.3 Noyau

Définition

Soit A un anneau commutatif, I une partie de A ; on dit que I est un idéal de A si :

- I est un sous-groupe de $(A, +)$
- $\forall x \in A, \forall y \in I, xy \in I$

Propriété

Les idéaux de l'anneau $K[X]$ sont les

$$I = (P) = P.K[X] = \{PQ / Q \in K[X]\}$$

c'est-à-dire les multiples d'un polynôme fixé P.

Propriété

Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Application

Ici, $\ker\varphi$ est un idéal de $K[X]$.

6.2 Premier cas : $\ker\varphi = \{0\}$

Dans ce cas, φ induit un isomorphisme d'algèbres de $K[X]$ sur $K[u]$. Ce n'est pas possible si E est de dimension finie.

6.3 Deuxième cas : $\ker\varphi \neq \{0\}$

$\ker\varphi$ est donc engendré par un polynôme unique unitaire, appelé le polynôme minimal de u, noté π_u, ou μ_u.

Caractérisation

Le polynôme minimal π est caractérisé par :

$$\forall P \in K[X]\,,\ P(u) = 0 \Longleftrightarrow \pi/P$$

Ou encore, les polynômes annulés par u sont les multiples de π.

6.3.1 Exemples

Cas où u est

- une homothétie $\lambda.\mathrm{Id}$

$$\pi_u = X - \lambda,\ K[u] = Vect(\mathrm{Id})$$

- un projecteur

$$\pi_u = X^2 - X,\ K[u] = Vect(\mathrm{Id}, u)$$

sauf si ?

- une involution

$$\pi_u = X^2 - 1,\ K[u] = Vect(\mathrm{Id}, u)$$

sauf si ?

6.3.2 Théorème

Soit d le degré de π_u ; $\left(u^k\right)_{0\leq k\leq d-1}$ est une base de $K[u]$.

Démonstration

$\left(u^k\right)_{0\leq k\leq d-1}$ est libre par définition du polynôme minimal. Montrons qu'elle est génératrice :

Soit $P \in K[X]$; π_u étant non nul, on peut écrire la division euclidienne

$$P = \pi_u.Q + R$$

D'où $P(u) = R(u)$, ce qui prouve que $P(u)$ est combinaison linéaire de la famille $\left(u^k\right)_{0\leq k\leq d-1}$.

6.3.3 Théorème

Si E est de dimension finie n, π_u existe. Que dire de son degré ?

Réponse

$\left(u^k\right)_{0\leq k\leq n^2}$ est liée, donc π_u existe, et $\deg\pi_u \leq n^2$.

En fait, le théorème de Cayley-Hamilton prouve que $\deg\pi_u \leq n$.

6.4 Polynômes et valeurs propres

6.4.1 Lemme

Soit $u \in L(E)$, $x \in E$, $\lambda \in K$.

Si $u(x) = \lambda x$, alors, pour tout polynôme $P \in K[X]$:

$$P(u)(x) = P(\lambda).x$$

Démonstration

On le montre d'abord pour les monômes $P = X^n$, par récurrence sur n.

- $n = 0$; $P = X^n = 1$; $P(u)(x) = P(\lambda).x = x$, car $P(u) = Id$.
- soit $n \geq 1$; supposons la propriété vraie pour X^{n-1}. Soit $P = X^n$.

$$P(u)(x) = u^n(x) = u\left(u^{n-1}(x)\right) = u\left(\lambda^{n-1}.x\right) = \lambda^{n-1}.u(x)$$

Donc $P(u)(x) = \lambda^n.x = P(\lambda).x$.

Conclusion, la propriété est vérifiée pour tout $n \geq 0$. Par linéarité, elle est vérifiée pour tous les polynômes.

6.4.2 Théorème

Si $P(u) = 0$, toute valeur propre de u est racine de P.

Remarque

Les racines de P ne sont pas forcément des valeurs propres (pourquoi ?), néanmoins :

6.4.3 Lemme

Soit $u \in L(E)$ $(E \neq \{0\})$; s'il existe un polynôme non nul scindé P tel que $P(u) = 0$, alors u a au moins une valeur propre.

Démonstration

Supposons

$$(u - a_1.\mathrm{Id}) \circ ... (u - a_r.\mathrm{Id}) = 0$$

Les $u - a_j.\mathrm{Id}$ ne peuvent pas être tous injectifs, car sinon leur produit le serait.

6.4.4 Exercice

Si u possède un polynôme minimal, ses racines sont les valeurs propres.

Démonstration

Soit λ une racine de π_u ; $\pi_u = (X - \lambda) Q$; $Q(u)$ n'est pas nul, pourquoi ? De plus

$$\mathrm{Im} Q(u) \subset \ker(u - \lambda.\mathrm{Id})$$

Donc λ est valeur propre de u.

Remarque

Si E est de dimension finie, il y a une démonstration plus simple :

Soit λ une racine de π_u ; d'après le théorème de Cayley-Hamilton, λ est aussi racine du polynôme caractéristique χ_u, donc λ est valeur propre de u.

6.4.5 Exercice

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $u : f \to f'$; montrer que u n'a pas de polynôme minimal.

Démonstration

Montrer que u possède une infinité de valeurs propres.

6.4.6 Exercice

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $u : P \to X.P$; montrer que u n'a pas de polynôme minimal.

Démonstration

Soit P et Q quelconques dans E ; $(Q(u))(P)$ s'exprime simplement :

$$(Q(u))(P) = P.Q$$

6.4.7 Exercice

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $v : P \to P'$; montrer que v n'a pas de polynôme minimal.

Démonstration

Soit Q un polynôme non nul ; soit q la valuation de Q :

$$Q = a_q.X^q + a_{q+1}.X^{q+1} + ...$$

avec $a_q \neq 0$.

Soit $P = X^q$; $(Q(v))(P) = a_q.q! \neq 0$; donc :

$$Q(v) \neq 0$$

6.5 Théorème de Cayley-Hamilton

Démonstration non exigible

Ici, E est supposé de dimension finie.

Enoncé

Soit $u \in L(E)$; alors :

$$\chi_u(u) = 0$$

Ou encore : π_u... ? Que dire du degré de π_u ?

Démonstration dans un cas particulier

On suppose qu'il existe une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que

$$M = M_B(u) \in T_n(K)$$

Notons $\lambda_j = a_{j,j}$; alors :

$$\chi_u(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)$$

Notons $E_0 = \{0\}, E_j = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_j)$.

Alors, pour $1 \leq j \leq n$:

$$(u - \lambda_j.\mathrm{Id})(E_j) \subset E_{j-1}$$

On en déduit

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \prod_{j=k}^{n} (u - \lambda_j \mathrm{Id})(E) \subset E_{k-1}$$

Conclusion ?

6.6 Deux exercices

6.6.1 $u^{-1} \in K[u]$

Exercice

Soit $u \in GL(E)$; on suppose l'existence du polynôme minimal M_u ; montrer que

$$u^{-1} \in K[u]$$

Trouver un contre-exemple dans le cas contraire.

Démonstration

$M_u(u) = 0$:

$$a_0.\mathrm{Id} + a_1.u + ... + u^q = 0$$

De plus, le terme constant a_0 de M_u n'est pas nul, car 0 n'est pas valeur propre de u ; on en déduit une expression de u^{-1}.

Un contre-exemple

$E = K[X]$; $u : P \to P(X+1)$.

6.6.2 Sous-espaces stables dans le cas d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel

Exercice

Soit $u \in L(E)$ $(E \neq (0))$; on suppose l'existence du polynôme minimal M_u ; montrer qu'il existe dans E une droite ou un plan stable par u.

Démonstration

Si u possède une valeur propre, c'est clair ; sinon :

$$M_u = P_1...P_r$$

produit de r polynômes de degré 2.

$$0 = M_u(u) = \prod_{j=1}^{r} P_j(u)$$

Donc l'un au moins des $P_j(u)$ n'est pas injectif (en fait, c'est le cas de tous).

Soit $e_1 \in \ker P_j(u) - \{0\}$; soit $e_2 = u(e_1)$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$; écrivons

$$P_j = X^2 + aX + b$$

Alors :

$$u(e_2) = -a.e_2 - b.e_1$$

ce qui prouve que F est stable par u.

7 SEV stables sur un exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

7.1 Droites stables

On calcule $\chi_A = (X-2)\left(X^2 - 2X + 2\right)$; une seule droite stable, D, de base $e_1 + e_2 + e_3$.

7.2 Plans stables

Le TDN en donne un : $P = \ker\left(A^2 - 2A + 2I_3\right)$; montrer que c'est le seul (étudier l'intersection de deux plans stables).

Démonstration

Supposons l'existence d'un autre plan stable P' ; alors $D' = P \cap P'$ est une droite stable ; or, D est la seule droite stable ; donc $D = P \cap P'$; c'est impossible car D et P sont supplémentaires.

7.3 Complément : hyperplans stables

Exercice

Soit $E = K^n$, $M \in M_n(K)$. Soit $U = (u_1, ..., u_n)^T \neq 0$.

$$U^T.X = u_1 x_1 + ... + u_n x_n = 0$$

est une équation d'un hyperplan H ; H est stable par M si et seulement si U est un vecteur propre de M^T.

Démonstration

La stabilité de H signifie

$$\forall X \in H, M.X \in H$$

soit

$$\forall X \in E, U^T.X = 0 \Longrightarrow U^T.(MX) = 0$$

ou encore

$$\forall X \in E, U^T.X = 0 \Longrightarrow \left(M^T.U\right)^T.X = 0$$

ou, en notant $V = M^T.U$

$$\forall X \in E, U^T.X = 0 \Longrightarrow V^T.X = 0$$

Soit $f : X \to U^T.X$ et $g : X \to V^T.X$.

On vient de montrer que H est stable par M si et seulement si $\ker f \subset \ker g$; d'après un théorème, H est stable par M si et seulement si g est proportionnelle à f, ou encore V proportionnel à U.

En conclusion :

H est stable par M si et seulement si U est un vecteur propre de M^T.

7.4 Application à A

On trouve $U = (0, 1, 1)$, d'où $P : y + z = 0$.

Part II
Endomorphismes diagonalisables

8 Généralités

8.1 Définition

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

8.2 Caractérisation

Théorème

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E, ou encore, que tout vecteur soit somme de vecteurs propres.

Remarque : cette dernière définition s'applique même si E n'est pas de dimension finie.

8.3 Cas des matrices carrées

Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de K^n canoniquement associé est diagonalisable.

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.

8.4 Un cas particulier important

Théorème

Si $n = \dim E$, et si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Réciproque ?

8.5 Caractérisation

8.5.1 Théorème

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Démonstration

On sait que : $\dim\left(\bigoplus_\lambda E_\lambda\right) = \sum_\lambda \dim E_\lambda \leq \sum_\lambda m_\lambda \leq n$.

9 Exemples

9.1 $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

9.2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On a vu que $\chi_A = (X-2)\left(X^2 - 2X + 2\right)$.

9.3 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

$\chi_A = (X-1)^2 (X+1)$. On cherche le rang de $A - \mathrm{I}_3$.

9.4 Matrice compagnon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & . & & & -a_1 \\ & . & . & & . \\ & & . & 0 & . \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

On sait que :

$$\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$$

Montrer que pour tout scalaire λ, $rg\,(A - \lambda I_n) \geq n-1$. Dans quel cas A est-elle diagonalisable ?

Réponse

Les sous-espaces propres sont de dimension 1 ; A est donc diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes.

En résumé, A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

9.5 Une matrice tridiagonale

$a_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$, 0 sinon. On pose $P_n = \chi_{A_n}$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par P_n ; exprimer $P_n(2\cos\theta)$; en déduire le spectre de A_n ; est-elle diagonalisable ? Préciser les vecteurs propres.

Réponse

$P_{n+2} = X.P_{n+1} - P_n$; on étudie donc les suites récurrentes linéaires (u_n) telles que

$$\forall n \geq 0, u_{n+2} = 2.\cos\theta.u_{n+1} - u_n$$

D'où

$$\forall n \geq 0, u_n = A.\cos n\theta + B.\sin n\theta$$

Avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2.\cos\theta$ on obtient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

D'où les valeurs propres :

$$\lambda_k = 2\cos\theta_k,\ \theta_k = \frac{k\pi}{n+1},\ 1 \leq k \leq n$$

Vecteur propre associé

On résout une récurrence analogue :

$$x_{j-1} + x_{j+1} = \lambda_k x_j$$

Donc

$$\forall j, 0 \leq j \leq n,\ x_j = A.\cos j\theta_k + B.\sin j\theta_k$$

Avec $x_0 = 0$, on obtient le vecteur propre $(x_1, ..., x_n)^T$, où

$$x_j = \sin\frac{jk\pi}{n+1}$$

Ce calcul permet aussi de retrouver les valeurs propres en écrivant $x_{n+1} = 0$.

9.6 Encore un

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 & a_1 \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & 0 & . \\ a_1 & . & . & . & a_n \end{bmatrix}$$

a) Si $K = \mathbb{R}$?

b) Montrer que $\chi_M = X^{n-2}\left(X^2 - a_n X - s\right)$, où $s = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2$. (pivot par exemple).

c) Montrer que les sous-espaces propres associés à une valeur propre λ non nulle sont de dimension 1.

d) On suppose que : $\exists k \leq n-1, a_k \neq 0$; quel est le rang de M ? Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $s \neq 0$ et $a_n^2 + 4s \neq 0$.

10 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

10.1 Théorème

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

10.1.1 Démonstration

Soit $u \in L(E)$; soit $\{\lambda_1, ..., \lambda_q\}$ l'ensemble de ses valeurs propres ; soit

$$P = \prod_{j=1}^{q} (X - \lambda_j)$$

Les λ_j étant distincts :

$$\ker P(u) = \bigoplus_{j=1}^{q} \ker(u - \lambda_j.\mathrm{Id})$$

Supposons u diagonalisable : la somme des sous-espaces propres est E ; donc $P(u) = 0$; P est donc un polynôme scindé à racines simples annulant u, et c'est le polynôme minimal de u.

Réciproque

S'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, le TDN montre directement que E est somme de sous-espaces propres.

10.1.2 Exemples

Les projecteurs, les symétries sont diagonalisables.

10.2 Lemme

Soit $u \in L(E)$; soit F un sous-espace stable par u ; soit v l'endomorphisme de F induit par u ; alors π_v divise π_u.

10.3 Théorème

Soit $u \in L(E)$; soit F un sous-espace stable par u ; soit v l'endomorphisme de F induit par u ; si u est diagonalisable, alors v est diagonalisable.

10.4 Exercice : $B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$

Ici, A est une matrice carrée ; montrer que si B est diagonalisable, alors A est diagonalisable, puis $A = 0$.

Réponse

On peut montrer que pour tout polynôme P :

$$P(B) = \begin{bmatrix} P(A) & A.P'(A) \\ 0 & P(A) \end{bmatrix}$$

Supposons que B est diagonalisable ; soit M son polynôme minimal ; M est scindé à racines simples, et

$$M(A) = A.M'(A) = 0$$

Ensuite on utilise le fait que $M \wedge M' = 1$.

10.5 Sous-espaces stables

Exercice

Soit $u \in L(E)$ diagonalisable ; décrire les sous-espaces de E stables par u.

Réponse

Ce sont les sommes de sous-espaces de sous-espaces propres : F est stable par u si et seulement si

$$F = \bigoplus_{\lambda} (F \cap E_{\lambda}(u))$$

11 Compléments

11.1 Commutant

Soit E un espace vectoriel E de dimension finie ; soit $u \in L(E)$ diagonalisable ; décrire le commutant $C(u)$ et donner sa dimension.

Indications

$u \circ v = v \circ u$ si et seulement si les sous-espaces propres de u sont stables par v.

On en déduit que

$$\dim C(u) = \sum_{\lambda} n_{\lambda}^2$$

où les n_{λ} sont les dimensions des sous-espaces propres $E_{\lambda}(u)$.

11.2 Réduction simultanée

11.2.1 Cas de deux endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; soit u et v deux endomorphismes diagonalisables qui commutent ; montrer qu'il existe une base commune de vecteurs propres.

Démonstration

Soit $E_1, ..., E_q$ les sous-espaces propres de u ; soit $v_1, ..., v_q$ les endomorphismes induits par v sur $E_1, ..., E_q$; les v_j existent et sont diagonalisables, pourquoi ?

Pour chaque $j \leq q$, soit B_j une base de vecteurs propres de v_j ; $B = (B_1, ..., B_q)$ convient.

11.2.2 Application

Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables qui commutent.

Alors $u + v$ et $u \circ v$ sont diagonalisables.

11.2.3 Contre-exemples

Trouver deux matrices diagonalisables dont la somme ne l'est pas.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver deux matrices diagonalisables dont le produit ne l'est pas.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.2.4 Généralisation

Soit E un espace vectoriel E de dimension finie ; soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux ; montrer qu'il existe une base commune de vecteurs propres.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$.

- $n = 1$: c'est clair.
- Soit $n \geq 2$; supposons P_k pour tout k, $1 \leq k \leq n-1$ et montrons P_n.

Si tous les u_j sont des homothéties, toute base convient ; sinon, fixons j_0 tel que $u = u_{j_0} \notin K.\text{Id}$.

Fixons un sous-espace propre F de u ; on applique alors l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes v_j induits par les u_j sur F.

11.3 Réduction par blocs

Soit $B = \begin{bmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{bmatrix} \in M_{2n}(K)$; montrer que B est semblable à $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{bmatrix}$; est-elle diagonalisable ?

Réponse

Soit $b = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; b est semblable à ?

b est semblable à $d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = p^{-1}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.p$$

On en déduit

$$\begin{bmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{bmatrix} = P^{-1}.\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{bmatrix}.P$$

avec P ?

P est obtenue à partir de p en remplaçant les $p_{i,j}$ par $p_{i,j}.I_n$.

Conclusion

On en déduit que B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

11.4 Matrices circulantes

$M = \begin{bmatrix} a_0 & . & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & . & & & a_2 \\ a_2 & . & . & & . \\ . & & . & . & . \\ a_{n-1} & . & . & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$; donner une définition précise ; exprimer M en fonction de

$$J = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & . & & & \\ & & . & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}$$

Calculer χ_J. J, M sont-elles diagonalisables ?

Réponse

$m_{i,j} = a_{i-j}$; soit $P = a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$; alors

$$M = P(J)$$

$\chi_J = X^n - 1$; J et M sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$.

11.5 Endomorphismes dans $E = M_n(K)$

11.5.1 $f(M) = AM$

A est un élément fixé de E ; montrer que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

11.5.2 $g(M) = MB$

B est un élément fixé de E ; montrer que g est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

11.5.3 $h(M) = AM + MB$, $k(M) = AMB$

Montrer que si A et B sont diagonalisables, h et k sont diagonalisables.

11.5.4 Réponses

f et A ont le même polynôme minimal ; idem pour g et B ; f et g commutent.

Part III

Endomorphismes trigonalisables

12 Introduction

12.1 Endomorphismes trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

12.2 Interprétation géométrique

Soit $u \in L(E)$; soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base ; notons, pour $1 \leq k \leq n$,

$$E_k = \text{Vect}(e_1, ..., e_k)$$

Alors, $M_B(u)$ est triangulaire supérieure si et seulement si ces n sous-espaces sont stables par u.

12.3 Cas des matrices

Définition

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème

1- Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.
2- Soit $u \in L(E)$ et B une base de E ; u est trigonalisable si et seulement si $M_B(u)$ l'est.

12.4 Caractérisation par le polynôme caractéristique

12.4.1 Théorème

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration

Montrons par récurrence sur $n = \dim E$ que si χ_u scindé, u est trigonalisable.

- c'est clair si $n = 1$.
- soit $n \geq 2$; supposons la propriété vraie jusqu'à $n - 1$.

On suppose χ_u scindé ; soit λ une valeur propre de u ; soit

$$F = \mathrm{Im}\,(u - \lambda.\mathrm{Id})$$

F est stable par u et $F \neq E$; soit $v = u_F$ l'endomorphisme de F induit par u.

Dans une base appropriée :

$$M\,(u) = \begin{bmatrix} M_F & \star \\ 0 & \lambda I_p \end{bmatrix}$$

En effet :

$$\forall x \in E, u\,(x) = \lambda.x + (u - \lambda.\mathrm{Id})\,(x)$$

et

$$\forall x \in E, (u - \lambda.\mathrm{Id})\,(x) \in F$$

On sait que χ_v divise χ_u ; donc χ_v est également scindé ; on applique alors l'hypothèse de récurrence à $v = u_F$:

Il existe une base B' de F telle que $M_{B'}\,(v)$ soit triangulaire supérieure.

12.4.2 Généralisation

On verra plus loin que s'il existe un polynôme scindé tel que $P\,(u) = 0$, alors u est trigonalisable.

12.4.3 Corollaire

Dans $M_n\,(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable.

12.5 Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

12.5.1 Dans $M_n\,(\mathbb{C})$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$; soit $u \in L\,(E)$; alors $\chi_u\,(u) = 0$; pourquoi ?

12.5.2 Dans $M_n\,(\mathbb{R})$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$; soit $u \in L\,(E)$; alors $\chi_u\,(u) = 0$; pourquoi ?

Réponse

Soit B une base de E ; soit $M = M_B\,(u)$; M appartient à $M_n\,(\mathbb{R})$ mais aussi à $M_n\,(\mathbb{C})$.

Dans $M_n\,(\mathbb{C})$, on sait que

$$\chi_M\,(M) = 0$$

De plus, χ_M est le même dans $M_n\,(\mathbb{R})$ et dans $M_n\,(\mathbb{C})$.

Donc, dans $M_n\,(\mathbb{R})$:

$$\chi_M\,(M) = 0$$

Donc

$$\chi_u\,(u) = 0$$

13 Nilpotents

13.1 Définition

Soit $f \in L(E)$; on dit que f est nilpotent s'il existe $q \geq 1$ tel que $f^q = 0$.
On appelle indice ou ordre de nilpotence :

$$p = \min\{q \geq 1 / f^q = 0\}$$

13.2 Exemple

$E = \mathbb{R}[X]$; $D : P \to P'$; D est-il nilpotent?

Réponse

Non, mais D induit un endomorphisme nilpotent sur $\mathbb{R}_n[X]$, d'indice $n+1$.

On suppose dans la suite que E est un espace vectoriel de dimension finie n.

13.3 Caractérisation

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. Son polynôme caractéristique est alors X^n.

Démonstration

Soit $f \in L(E)$ nilpotent ; 0 est valeur propre de f et c'est la seule ; pourquoi ? De plus f est trigonalisable : presque exactement la même démonstration que le cas où χ_u est scindé.

13.4 Polynôme minimal

$\pi_f = X^p$ où p est l'indice de nilpotence.

13.5 Théorème

L'indice de nilpotence p est majoré par la dimension n de E.

Une démonstration élémentaire

Soit $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$; on montre que $\left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$ est libre.

Autre démonstration

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le degré p du polynôme minimal est majoré par n.

14 Endomorphismes à polynôme minimal scindé

14.1 Réduction

Théorème

Soit $u \in L(E)$; on suppose qu'il existe un polynôme scindé tel que $P(u) = 0$.
Alors :

- u est trigonalisable
- plus précisément, E est somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Démonstration

$$\pi_u = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{p_j}$$

où les λ_j sont supposés distincts ; notons

$$F_j = \ker (u - \lambda_j.\mathrm{Id})^{p_j}$$

Alors :

$$E = \bigoplus_{j=1}^{r} F_j$$

Pourquoi ? Les F_j sont stables par u ; pourquoi ? Notons u_j l'endomorphisme induit par u sur F_j ; u_j est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent ; lesquels ?

14.2 Traduction matricielle

Théorème

Soit $A \in M_n(K)$; on suppose qu'il existe un polynôme scindé tel que $P(A) = 0$. Alors :
- A est trigonalisable
- plus précisément, il existe une matrice B semblable à A, diagonale par blocs, les blocs B_j étant de la forme

$$B_j = \lambda_j I + N_j$$

et les N_j étant nilpotentes.

14.3 La décomposition $d + n$

Exercice

Soit $u \in L(E)$; on suppose qu'il existe un polynôme scindé tel que $P(u) = 0$. Alors il existe un couple unique d'endomorphismes (d, n) vérifiant
- $u = d + n$
- d diagonalisable
- n nilpotent
- $d \circ n = n \circ d$

L'existence est facile ; pour l'unicité, on peut d'abord montrer que d_0 et n_0 sont dans $K[u]$.

On peut facilement montrer qu'il n'y a pas unicité sans l'hypothèse $d \circ n = n \circ d$.

14.4 Les suites récurrentes linéaires

Soit $n \geq 1$ et $a_0, ..., a_{n-1}$ des scalaires fixés ; on note F l'ensemble des suites $(u_k) \in E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $k \geq 0$

$$u_{k+n} = a_{n-1} u_{k+n-1} + ... + a_0 u_k$$

On suppose $a_0 \neq 0$; on note

$$P = X^n - a_{n-1} X^{n-1} ... - a_1 X - a_0$$

Soit

$$T : (u_k) \to (u_{k+1})$$

On remarque que $F = \ker P(T)$. F est donc stable par T ; on notera t l'endomorphisme de F induit par T.

14.4.1 $\dim F = n$

Démonstration

Un isomorphisme entre F et $\mathbb{C}^n$:

$$(u_k) \in F \to (u_0, ..., u_{n-1})$$

14.4.2 Cas où P est scindé à racines simples

On utilise le TDN ; on est ramené à chercher $\ker(T - \lambda.\mathrm{Id})$; on obtient une droite vectorielle : les suites géométriques de raison λ.

14.4.3 Cas où $P = (X - \lambda)^n$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

On note $N = t - \lambda.\mathrm{Id}$; soit $u \in F$.

$$\forall k \geq 0, t^k u = \sum_{q=0}^{n-1} \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} \lambda^{k-q} N^q u$$

Evaluons en 0 :

$$\forall k \geq 0, u_k = \sum_{q=0}^{n-1} c_q \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} \lambda^{k-q} = \lambda^k Q(k)$$

avec $\deg Q \leq n - 1$.

Part IV
Compléments

15 Calcul de A^n

15.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

On utilise la formule du binôme avec $A = I_2 + T$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $n \in \mathbb{Z}$?

15.2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Peut-on utiliser la formule du binôme ?

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3.(2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Méthode 1

$(f_1, f_2) = (e_1, 3.e_1 + e_2)$ base de vecteurs propres.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, a^n (f_2) = 2^n.f_2$$

Méthode 2

$\pi = (X-1)(X-2)$.

Division euclidienne :

$$X^n = \pi Q + R$$

On trouve R en évaluant en 1 et 2.

On obtient

$$R = (2^n - 1)(X-1) + 1$$

D'où

$$\forall n \geq 0, A^n = (2^n - 1)(A - I_2) + I_2$$

15.3 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Méthode 1

La formule du binôme :

$$A = I_2 + N$$

Méthode 2

$\pi = (X-1)^2$.

Division euclidienne :

$$X^n = \pi Q + R$$

On trouve R en évaluant $R(1)$ et $R'(1)$.

On obtient

$$R = nX + 1 - n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{bmatrix} 1+n & n \\ -n & 1-n \end{bmatrix}$$

16 Les endomorphismes cycliques

On suppose dans la suite que E est un espace vectoriel de dimension finie n et que $u \in L(E)$.

16.1 Le polynôme π_x

Soit $x \in E$; on note π_x le générateur unitaire de

$$I_x = \{P \in K[X] \ / \ P(u)(x) = 0\}$$

Comparer π_x et π_u ; trouver π_x dans les cas suivants :

1- $x = 0$.

2- x est un vecteur propre.

3- x est la somme de deux vecteurs propres.

4- $x \in \mathrm{Ker} u^2 \setminus \mathrm{Ker} u$.

16.2 Le sous-espace E_x

Soit $d = d(x) = \deg \pi_x$; soit

$$E_x = \mathrm{Vect}\left(x, ux, ..., u^{d-1}(x)\right)$$

Propriétés de E_x :

1- E_x contient x.

2- E_x est stable par u.

3- E_x est le plus petit sous-espace de E contenant x et stable par u.

4- $d = \dim E_x$.

5- Notons u_x l'endomorphisme induit par u sur E_x ; π_x est le polynôme minimal de u_x.

6- Matrice de l'endomorphisme induit par u sur E_x ?

16.3 Les endomorphismes cycliques

On dit que u est cyclique s'il existe a tel que $E = E_a$.

Exemple : montrer que si u possède n valeurs propres distinctes, alors u est cyclique.

Réponse

Ssoit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres ; soit $a = e_1 + ... + e_n$.

On étudie $\left(a, ua, ..., u^{n-1}a\right)$; on obtient un déterminant connu.

16.4 Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Fixons $a \in E$; soit v l' endomorphisme induit par u sur E_a ; on sait que χ_v divise χ_u.

On montre facilement avec ce qui précède que

$$\chi_v\left(v\right)\left(a\right) = 0$$

16.5 Le commutant

On suppose u cyclique : $E = E_a$; montrer que le commutant $C\left(u\right)$ est de dimension n, engendré par $\left(\mathrm{Id}, u, ..., u^{n-1}\right)$.

On peut utiliser

$$v \to v\left(a\right)$$

définie sur $C\left(u\right)$.

16.6 Nombre fini de sous-espaces stables

On suppose u cyclique : $E = E_a$; montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-espaces stables.

Indications

Soit F un tel sous-espace. Soit

$$J_F = \left\{Q \in K\left[X\right] / Q\left(u\right)\left(a\right) \in F\right\}$$

On vérifie que J_F est un idéal contenant π_u :

$$\pi_u = P_1 P_2,\ J_F = P_1.K\left[X\right]$$

Il reste à vérifier que

$$F = \mathrm{Im}\, P_1\left(u\right)$$

On remarque au passage que l'endomorphisme v induit par u sur F est cyclique, et que

$$\pi_v = P_2$$

En résumé,

il y a une bijection entre les sous-espaces F stables par u et les diviseurs unitaires D de π_u :

D est le générateur unitaire de J_F

$F = \mathrm{Im}\, D\left(u\right)$

16.7 x tel que $\pi_x = \pi_u$

Ici, on ne suppose pas u cyclique.

Il existe toujours un $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$.

Démonstration

E est l'union des $\operatorname{Ker}\pi_x(u)$; union finie de sous-espaces, donc il existe a tel que

$$\operatorname{Ker}\pi_a(u) = E$$

Pour ce vecteur a, $\pi_a = \pi_u$.

16.8 Les suites récurrentes linéaires

On note F l'ensemble des suites $(u_k) \in E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $k \geq 0$

$$u_{k+n} = a_{n-1}u_{k+n-1} + ... + a_0 u_k$$

On suppose $a_0 \neq 0$; on note

$$P = X^n - a_{n-1}X^{n-1}... - a_1 X - a_0$$

Soit $T : (u_k) \to (u_{k+1})$; on remarque que

$$F = \ker P(T)$$

On rappelle que F est de dimension n ; on désigne désormais par T l'endomorphisme induit sur F.

Soit e_1 l'élément de F dont les n premiers termes sont $(0, ..., 0, 1)$. e_1 est donc la suite $(u_k) \in F$ telle que

$$u_{n-1} = 1,\ u_0 = u_1 = ... = u_{n-2} = 0$$

On note

$$e_j = T^{j-1}(e_1)$$

On vérifie que $B = (e_1, ..., e_n)$ est libre ; la matrice M de T dans la base B est donc une matrice compagnon ; quelle est sa dernière colonne ?

Réponse

Il suffit de remarquer que $e_1 \in F = \ker P(T)$; donc

$$T(e_n) = T^n(e_1) = -a_0 e_1 - a_1 e_2 ...$$

Finalement, M est la matrice compagnon du polynôme P.

17 Les matrices stochastiques

17.1 Le cas général

17.1.1 Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$; on dit que A est stochastique si : $\forall i, j, a_{i,j} \geq 0$, et

$$\forall i, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

Remarque : $AU = U$ pour $U = (1, ..., 1)^T$.

Exemple : un système évolutif peut être dans n états différents ; $a_{i,j}$ représente la probabilité d'être dans l'état j au temps $t+1$ sachant qu'il est dans l'état i au temps t.

17.1.2 Premières propriétés

Notons $St_n \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques.

St_n est compact, convexe et stable par multiplication.

17.1.3 Spectre

Soit $A \in St_n(\mathbb{R})$; alors 1 est une valeur propre de A, et $\rho(A) = 1$; si 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$, $A = I_n$.

Démonstration

Soit λ une valeur propre, et X un vecteur propre associé ; soit i tel que $|x_i| = \max_j |x_j| = \|x\|_\infty$.

$$\lambda.x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.x_j$$

Avec l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda| . \|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty . \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

D'où :

$$|\lambda| . \|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

Or $x \neq 0$, donc $|\lambda| \leq 1$.

Si 1 est la seule valeur propre de A, utiliser la trace.

17.1.4 Plus difficile

Soit $A \in St_n(\mathbb{R})$; soit λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

Alors $|\lambda| < 1$, ou λ est une racine de l'unité.

Démonstration

Soit λ une valeur propre de module 1. Soit X un vecteur propre associé.

Soit i tel que $|x_i| = \|x\|_\infty$; soit

$$J = \{j \,/\, a_{i,j} \neq 0\}$$

A nouveau :

$$\lambda.x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.x_j = \sum_{j \in J} a_{i,j}.x_j$$

Avec l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda| . \|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty . \sum_{j \in J} a_{i,j}$$

De plus ici, $|\lambda| = 1$.

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire.

Donc, pour $j \in J$, les x_j sont positivement liés. et vérifient $|x_j| = \|x\|_\infty$.

Donc les x_j sont égaux.

En revenant au départ :

$$\lambda.x_i = \sum_{j \in J} a_{i,j}.x_j = x_j . \sum_{j \in J} a_{i,j} = x_j$$

En résumé :

$$\forall j \in J,\, x_j = \lambda x_i$$

Ce n'est que la première étape !

17.2 Les matrices stochastiques strictes

17.2.1 Définition

Soit $A \in St_n(\mathbb{R})$; on dit que A est stochastique stricte si :

$$\forall i, j,\, a_{i,j} > 0$$

17.2.2 Spectre

1 est la seule valeur propre de module 1, et $E_1(A)$ est de dimension 1.

Démonstration

Soit λ une valeur propre de module 1, et X un vecteur propre associé.

Soit i tel que $|x_i| = \max\limits_j |x_j| = \|x\|_\infty$.

$$\lambda.x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.x_j$$

Avec l'inégalité triangulaire :

$$\|x\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}.x_j| \leq \|x\|_\infty . \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \|x\|_\infty$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire. On en déduit que les x_j sont colinéaires, de même sens, et de même module.

Donc x est colinéaire à $(1,...,1)^T$ et $\lambda = 1$.

17.2.3 1 est valeur propre simple

Indication

On écrit $A = I_n + B$, et on montre que

$$\ker B = \ker B^2$$

en utilisant le fait que la suite $\left(A^k\right)$ est bornée et la formule du binôme.

On en déduit que 1 est racine simple du polynôme minimal de A, et de plus on a vu que $E_1(A)$ est de dimension 1.

17.2.4 Convergence de $\left(A^k\right)$

D'après ce qui précède, $\left(A^k\right)$ converge vers une matrice B ; que dire de B ?

Réponse

B est stochastique et de rang 1 ; donc ses lignes sont identiques : $b_{i,j} = l_j$; ${}^t(l_1,...,l_n) \in E_1({}^tA)$.

17.2.5 Convergence de $\left(A^k\right)$, méthode directe

Posons $\varepsilon = \min\limits_{i,j} a_{i,j}$; $\varepsilon > 0$; fixons un vecteur colonne X.

Soit $X_k = A^k X$, $m_k = \min X_k$ et $M_k = \max X_k$; on montre alors :

$$m_{k+1} \geq (1-\varepsilon)\, m_k + \varepsilon M_k,\ \ M_{k+1} \leq (1-\varepsilon)\, M_k + \varepsilon m_k$$

puis

$$M_{k+1} - m_{k+1} \leq (1-2\varepsilon)\,(M_k - m_k)$$

18 La réduction de Jordan

Ici, E est un $K-$espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. u est un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geq 2$:

$$u^q = 0,\ u^{q-1} \neq 0$$

On se propose de montrer l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est très simple.

18.1 Intersection d'hyperplans

Soit $\varphi_1, ..., \varphi_p$ p formes linéaires sur E.

Montrer que

$$\dim \bigcap_{j=1}^{p} \ker\varphi_j \geq n - p$$

Indication

Utiliser

$$\varphi : x \to (\varphi_1 (x), ..., \varphi_p (x))$$

18.2 Un premier sous-espace stable par u

Soit $a \in E$ tel que

$$u^{q-1} (a) \neq 0$$

Soit

$$F = \text{Vect} \left(a, ..., u^{q-1} (a)\right)$$

Montrer que F est un sous-espace de E de dimension q stable par u.

Soit $B_F = \left(u^{q-1} (a), ..., a\right)$. Décrire la matrice de u_F dans la base B_F.

18.3 Un supplémentaire stable

On souhaite prouver l'existence d'un supplémentaire de F stable par u.

Montrer l'existence d'une forme linéaire sur E, φ, telle que

$$\varphi \left(u^{q-1} (a)\right) \neq 0$$

On note $\varphi_j = \varphi \circ u^j$ et

$$G = \bigcap_{j=0}^{q-1} \ker\varphi_j$$

Montrer que G est stable par u et que F et G sont en somme directe. Qu'en déduire ?

18.4 Conclure

19 La conjecture de Chessa-Miannay

19.1 $\text{Tr}A^k = \text{Tr}B^k$

Soit A et B éléments de $M_n (\mathbb{C})$. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Tr}A^k = \text{Tr}B^k$$

Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

Démonstration

Notons (α_j) les valeurs propres de A, (β_j) celles de B. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^k$$

Donc

$$\forall P \in \mathbb{C} [X], \sum_{j=1}^{n} P (\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} P (\beta_j)$$

En effet, c'est vrai pour les monômes.

Supposons que $\beta \in \text{Sp} (B) \setminus \text{Sp} (A)$. Il existe un polynôme P qui a pour racines :

$$R (P) = \text{Sp} (A) \cup \text{Sp} (B) \setminus \{\beta\}$$

ce qui constitue une contradiction.

19.2 Une autre démonstration du TCH

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Notons

$$\chi_A(X) = \mathrm{Det}(XI_n - A) = \sum_{j=0}^{n} a_k X^k = P(X)$$

On sait que

$$(\mathrm{com}(XI_n - A))^T . (XI_n - A) = P(X) . I_n$$

On peut écrire

$$(\mathrm{com}(XI_n - A))^T = B_0 + XB_1 + ... + X^{n-1}B_{n-1}$$

où $B_0, ..., B_{n-1}$ sont des éléments de $M_n(\mathbb{C})$. On en déduit :

$$-B_0 A = a_0 I_n$$

$$-B_1 A + B_0 = a_1 I_n$$

$$...$$

$$-B_{n-1} A + B_{n-2} = a_{n-1} I_n$$

$$B_{n-1} = I_n$$

En multipliant par respectivement $I_n, A, A^2, ..., A^n$ et en sommant, on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} a_j A^j = 0$$

19.3 Amélioration

Soit A et B éléments de $M_n(\mathbb{C})$. On suppose maintenant que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \mathrm{Tr}A^k = \mathrm{Tr}B^k$$

Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

1e étape

On généralise le calcul précédent.

On obtient, pour $1 \leq k \leq n$:

$$\sum_{j=0}^{n-k} a_{j+k} A^j = B_{k-1}$$

2e étape

On a vu que

$$a_1 = \chi_A'(0) = P'(0) = (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}(\mathrm{com}\, A)$$

On en déduit facilement que

$$P'(X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{com}(XI_n - A))$$

3e étape

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) . a_{k+1} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Tr}(B_k) X^k$$

D'où

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \mathrm{Tr}B_{k-1} = k.a_k$$

4e étape

En combinant la 1e et la 3e :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] , \sum_{j=0}^{n-k} a_{j+k} \mathrm{Tr}\left(A^j\right) = k.a_k$$

ou encore

$$\forall k \in [\![1, n]\!] , \sum_{j=1}^{n-k} a_{j+k} \mathrm{Tr}\left(A^j\right) = (k - n) .a_k$$

Connaissant les $\mathrm{Tr}\left(A^j\right)$, ces formules constituent un algorithme pour calculer les a_k, donc le polynôme caractéristique, par récurrence en partant de $a_n = 1$.