Polynômes orthogonaux

1 Polynômes de Laguerre.
Soit $E = \{ f \in C^\circ([0, +\infty[, \mathbb{R}) \ / \ x \to e^{-x} f^2(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[\}$.

a Montrer que E est un EV et que $(f, g) \to \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x) dx$ définit un PS sur E.

b Montrer que E contient les fonctions polynomiales.

c On note $(P_n)_{n\geq 0}$ la base obtenue par orthonormalisation de la base canonique ; montrer que : $\forall n \geq 0, \ (P_n(0))^2 = 1$.

d Soit F l'ensemble des polynômes nuls en 0 ; déterminer l'orthogonal de F dans $\mathbb{R}[X]$.

2 Polynômes de Legendre : Soit $A_n = (X^2-1)^n$, $L_n = A_n^{(n)}$ et $E_n : (x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y = 0$.

a Montrer sans calculs (presque) que E_n possède une solution polynomiale de degré n.

b Montrer que L_n possède n racines distinctes dans $I =]-1,1[$. (Rolle).

c Montrer que (L_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le PS défini par $(P / Q) = \int_I PQ$.

d On note $Q_n = (1-X^2)L_n'$. Montrer que $(Q_n' / X^k) = 0$ pour tout $k < n$.

e En déduire que (L_n, Q_n') est liée, puis que L_n est solution de E_n.

f Les solutions de E_n sont-elles toutes DSE ?

3a Soit $n \geq 0$. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme, noté T_n, tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \ T_n(\cos t) = \cos nt$.

b Montrer que : $\forall n \geq 1, \ T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$. Calculer T_n pour $n \leq 3$. Préciser le terme constant, le degré, et le terme dominant de T_n. Montrer que T_n a la même parité que n.

c Comment calculer T_n en Python ?

d Soit $E = C^\circ([-1,1], \mathbb{R})$; pour f, g éléments de E, on pose $(f / g) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Vérifier l'intégrabilité, et montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

e Montrer que $(T_n)_{n\in N}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

f Chercher les racines de T_n et étudier ses variations sur $[-1,1]$.

g Que dire de $T_n(chx)$? Etudier les variations de T_n sur $\mathbb{R}$.

h Montrer que T_n est solution de $(1-x^2)y''-xy'+n^2 y = 0$.

4 Polynômes de Laguerre.
Soit $E = \{ f \in C^\circ([0, +\infty[, \mathbb{R}) \ / \ x \to e^{-x} f^2(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[\}$.

a Montrer que E est un EV et que $(f, g) \to \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x) dx$ définit un PS sur E.

b Soit $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} \frac{x^n}{n!})$; montrer que L_n est un polynôme de degré n.

c Soit $\alpha_n(x) = e^{-x} \frac{x^n}{n!}$; montrer que $D^k \alpha_n(0) = 0$ si $k < n$, 1 si $k = n$, puis que $(L_n)_{n\in N}$ est une BON de $\mathbb{R}[X]$.

d Soit $a \geq 0$ et $f_a(x) = e^{-ax}$; montrer que $\| f_a \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} < f_a, L_n >^2 = \frac{1}{2a+1}$.

e Etablir que $\{ f_n \ / \ n \in \mathbb{N} \}$ engendre un SEV dense dans E.

f A l'aide de **d** et **e**, montrer que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans E ; en déduire que : $\forall f \in E, \ \| f \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} < f, L_n >^2$.