Groupes

1 On définit sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne $*$ par : $x * y = x + y + xy$.
a Montrer que cette loi est commutative et associative.
b Montrer l'existence d'un élément neutre.
c Déterminer l'ensemble E des éléments inversibles.
d Montrer que E est un groupe isomorphe à un groupe connu.

2 Le centre C d'un groupe G est l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres.
Montrer que c'est un sous-groupe de G ; même question avec C_a, ensemble des éléments qui commutent avec un élément fixé a.

3 Montrer que l'union d'une suite croissante de sous-groupes de G est un sous-groupe de G. Que dire d'une union quelconque, d'une intersection ? Donner des exemples.

4 On suppose que H, K, et $H \cup K$ sont des sous-groupes du groupe G. Montrer que $H \subset K$ ou $K \subset H$.

5 Soit H un sous-groupe du groupe G. Que dire de $z = xy$ si x et y sont dans H, ou un seul des deux, ou aucun des deux ?
Soit H un sous-groupe du groupe G, distinct de G. Montrer que $G \setminus H$ engendre G.

6 Y a-t-il des groupes isomorphes parmi : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^{*+}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}^{*+}$, U, la réunion des U_n ?

7 Montrer que la réunion des U_n est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

8 Soit G un groupe fini de cardinal impair ; montrer que : $\forall y \in G, \exists x \in G, y = x^2$

9 Soit G et H des groupes finis et f un morphisme de G dans H ; soit $x \in G$; montrer que l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x. Trouver les morphismes de groupes de $\mathbf{U}_7$ dans $\mathbf{U}_{10}$, de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$.

10 Soit G un groupe fini et f un morphisme de G dans $\mathbb{C}^*$ non constant ; montrer l'existence de a tel que $f(a) \neq 1$; en utilisant $\sum_{x \in G} f(ax)$, montrer que $\sum_{x \in G} f(x) = 0$.

11 Si x et y sont éléments d'un groupe G, montrer que xy et yx ont le même ordre.

12 Soit G un groupe fini, f un endomorphisme de G. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ SSI $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
Montrer qu'on ne peut pas généraliser à un groupe quelconque.

13 Soit a élément d'un groupe G, p et q éléments de $\mathbb{N}^*$. Si a est d'ordre pq, quel est l'ordre de a^p ?

14 Soit $A = \{ \frac{1}{n!} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \}$. Montrer que A engendre $\mathbb{Q}$.

15 Soit G groupe de cardinal n, et k tel que $k \wedge n = 1$. Montrer que $x \to x^k$ est une permutation de G.

16 Quels sont les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini ?

17 Soit $E = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} / \ a, b, c \in \mathbb{R} \}$. Trouver des parties de E qui constituent des groupes multiplicatifs.

18 Trouver deux éléments d'ordre fini dans un groupe dont le produit n'est pas d'ordre fini.

19 Donner un sens à $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et montrer que pour tout entier $n > 0$, G possède un unique SG de card n.

20 Soit G un groupe, Aut G l'ensemble des automorphismes de G.
a Montrer que (Aut G, o) est un groupe.
b Soit a élément de G, et $\varphi_a(x) = axa^{-1}$. Montrer que $\varphi_a \in$ Aut G.

c Décrire Aut G si $G = \mathbb{Z}$.

21 Trouver un groupe infini dans lequel tout élément est d'ordre fini.

22 Soit G un groupe ; on suppose que : $\forall x \in G,\ x^2 = e$; montrer que G est abélien.
On suppose de plus que G est fini de cardinal n ; montrer que n est pair, sauf si $n = 1$.
On veut montrer que n est une puissance de 2. Pour cela, vérifier que si H est un sous-groupe de G, et si $a \in G - H$, alors $H \cup aH$ est aussi un sous-groupe.

Autre méthode : munir G d'une structure d' EV sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

23 Si G est un groupe de cardinal pair, montrer que G a au moins un élément d'ordre 2.
Montrer que tout groupe de cardinal $n \leq 5$ est abélien ; $n = 6$?

24 Soit p premier, $n \geq 1$, G groupe de cardinal p^n ; montrer que G a un élément d'ordre p.

25 Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Trouver une fonction périodique dont le groupe des périodes est G.

26 Soit G un groupe fini ; montrer qu'il existe une partie génératrice A telle que $|A| \leq \log_2 |G|$.