Topologie

1 La multiplication dans $\mathbb{C}[X]$

On note $E = \mathbb{C}[X]$, $E_n = \mathbb{C}_n[X]$;

$$\|P\| = \sum_k |a_k|$$

Etudier dans les cas suivants l'existence d'une constante C qui vérifie

1- $\forall P, Q \in E_n,\ \|P.Q\| \leq C\,\|P\|\,.\,\|Q\|$
2- $\forall P, Q \in E,\ \|P.Q\| \leq C\,\|P\|\,.\,\|Q\|$
3- $\forall P, Q \in E,\ \|P\|\,.\,\|Q\| \leq C\,\|PQ\|$
4- $\forall P, Q \in E_n,\ \|P\|\,.\,\|Q\| \leq C\,\|PQ\|$

Mêmes questions avec

$$\|P\| = \max_k |a_k|$$

2 Sur les racines dans $\mathbb{C}[X]$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \subset \mathbb{C}$; on note P_A l'ensemble des polynômes de degré n unitaires à racines dans A.

1- On suppose A compact ; montrer que P_A est compact.
2- On suppose A fermé dans $\mathbb{C}$; montrer que P_A est fermé dans $\mathbb{C}_n[X]$.
3- On suppose A ouvert dans $\mathbb{C}$; montrer que P_A est ouvert dans l'ensemble des polynômes unitaires de degré n.

Indications

1- Facile.
2- Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus A$. Soit $d = d(\lambda, A)$; alors $d > 0$ et

$$\forall P \in P_A,\ |P(\lambda)| \geq d^n$$

3- Pas facile.

3 Approximation polynomiale uniforme

On note $S = [a, b]$ avec $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, et

$$E = C^0(S, \mathbb{R})$$

Pour $g \in E$, on note $\|g\|_\infty = \sup\limits_S |g|$. On fixe un élément $f \in E$.

1- Montrer que $d = \mathrm{d}(f, E_n)$ est bien définie.
2- Montrer l'existence de $P \in E_n$ tel que

$$d = \|f - P\|_\infty$$

On fixe un tel polynôme P et on note

$$M = \|f - P\|_\infty$$

3- On note

$$X = \{x \in S / \ |f(x) - P(x)| = M\}$$

Montrer que X est non vide.

On va montrer que $\mathrm{card}(X) \geq n + 2$. On suppose $\mathrm{card}(X) \leq n + 1$.

4- Montrer l'existence de $L \in E_n$ coïncidant avec f sur X.

5- Montrer l'existence d'un ouvert U de S contenant X tel que

$$\sup_U |f-L| \leq \frac{M}{2}$$

Pour $\varepsilon \in [0,1]$, on note

$$P_\varepsilon = (1-\varepsilon)\, P + \varepsilon L$$

6- Montrer l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $\|f - P_\varepsilon\|_\infty < M$.

7- Conclure.

On va maintenant montrer l'unicité de P. On suppose l'existence de P_1 et P_2 éléments de E_n tels que

$$d = \|f-P_1\|_\infty = \|f-P_2\|_\infty$$

On note

$$P = \frac{P_1+P_2}{2}$$

8- Que dire de $\|f-P\|_\infty$?

9- Montrer que $P_1 = P_2$ en utilisant le résultat de 7.

4 Scindés à racines simples

Soit $n \geq 1$, et $U \subset \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré n ayant n racines réelles simples.

1- Montrer que U est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2- Trouver le nombre de composantes CPA de U.

5 Classe de similitude bornée

Quelles sont les matrices $M \in M_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est bornée ?

Indications

Montrer que si l'ensemble des matrices semblables à M est borné, alors tout vecteur non nul est vecteur propre de M.

6 Points isolés de $\{M/\, P(M) = 0\}$

Soit $E = M_n(\mathbb{C})$; soit $P \in \mathbb{C}[X]$; soit

$$Z = \{M \in E/\, P(M) = 0\}$$

1- Soit λ une racine multiple de P ; montrer que $A = \lambda I_n$ est un point non isolé de Z.

2- Soit λ une racine simple de P ; montrer que $A = \lambda I_n$ est un point isolé de Z.

3- Soit A un point isolé de Z ; on note

$$A_H = (I_n + H)^{-1} A (I_n + H)$$

montrer que pour H assez proche de 0, $A_H \in Z$, puis $A_H = A$.

Montrer enfin que A est une matrice scalaire.

Indications

1- Utiliser $A + \frac{1}{k} E_{1,2}$.

2- $P = (X-\lambda)\, Q$ avec $Q(\lambda) \neq 0$; $P(M) = (M - \lambda I_n)\, Q(M)$.

3- Toute matrice semblable à A est dans Z ; si $A_H = A$, A et H commutent ; seules les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{C})$.

7 Continuité du rayon spectral ρ

On note $E = M_n(\mathbb{C})$; pour $M \in E$, on note $\rho(M)$ le maximum des modules des valeurs propres de M.

1- Montrer qu'il existe une norme $\|\|$ sur E telle que

$$\forall M \in E, \rho(M) \leq \|M\|$$

2- Montrer que $(M, z) \to \chi_M(z)$ est continue sur $E \times \mathbb{C}$ et lipchitzienne sur tout compact.

3- On fixe $R > 0$; on note $K = \overline{B(0, R)}$ (boule dans E).

Soit $A, B \in K$. Soit α une valeur propre de A telle que $|\alpha| = \rho(A)$; montrer qu'il existe $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$ telle que

$$|\alpha - \beta| \leq C \|A - B\|^{\frac{1}{n}}$$

où C ne dépend que de R.

4- Montrer que ρ est continu sur E.

Indications

1- La norme subordonnée à n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$ convient.

2- C'est une fonction polynomiale, donc de classe C^∞ sur $E \times \mathbb{C}$; en particulier lipchitzienne sur tout compact.

3- On note

$$\chi_B(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - \beta_j)$$

Soit β une valeur propre de B telle que $|\alpha - \beta| = \min_j |\alpha - \beta_j|$

$$|\chi_B(\alpha) - \chi_A(\alpha)| = |\chi_B(\alpha)| = \left|\prod_{j=1}^{n} (\alpha - \beta_j)\right| \geq |\alpha - \beta|^n$$

4- De $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta| \leq C \|A - B\|^{\frac{1}{n}}$ on tire

$$\rho(A) \leq |\beta| + C \|A - B\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(B) + C \|A - B\|^{\frac{1}{n}}$$

Or A et B jouent des rôles symétriques, donc

$$\forall A, B \in K,\ |\rho(A) - \rho(B)| \leq C \|A - B\|^{\frac{1}{n}}$$

8 Matrices d'ordre fini

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit

$$A = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \,/\, \exists q \in \mathbb{N}^*, M^q = I_n\}$$

Montrer que

$$\overline{A} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \,/\, \mathrm{Sp}\, M \subset \mathbb{U}\}$$

9 Nilpotentes

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$; montrer que A est nilpotente si et seulement si il existe une suite (A_k) de matrices semblables à A qui converge vers 0.