Anneaux

1 Soit A un anneau commutatif, I et J deux idéaux.
Montrer que $I \cap J$ et $I + J$ sont des idéaux. $I \cup J$?

2 Soit I un idéal de l'anneau D des décimaux ; montrer que I est principal (étudier $I \cap \mathbb{Z}$).
Inversibles de D ?

3 Soit A un anneau commutatif ; quels sont les idéaux qui contiennent 1_A ?
Qui contiennent un élément inversible ?
Montrer que A est un corps SSI A et $\{0\}$ sont les seuls idéaux.

4 Soit $A = \{ \frac{p}{q} \ / \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ impair $\}$; montrer que A est un anneau ; est-ce un corps ?

5 Montrer que dans un groupe, la réunion d'une suite croissante de sous-groupes est un sous-groupe.
Montrer que dans un anneau, la réunion d'une suite croissante d'idéaux est un idéal.
Montrer que dans un anneau principal, toute suite croissante d'idéaux (I_n) est stationnaire.

6 On note $j = \exp(\frac{2i\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

b Soit $A = \{ a + bj \ / \ a, b \in \mathbb{Z} \}$. Montrer que A est un anneau.

c Montrer que : $\forall u \in A$, $|u|^2 \in \mathbb{N}$.

d Soit u un élément de A. Montrer que u est inversible si et seulement si $|u| = 1$.

e Déterminer l'ensemble A^* des éléments de A inversibles.

f Montrer que A est principal.

7 Soit A un anneau commutatif ; un idéal I de A est dit premier si :
$\forall x, y \in A,\ xy \in I \ \Rightarrow\ x \in I$ ou $y \in I$.

a Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$?

b A quelle condition l'idéal $I = \{0\}$ est-il premier ?

c Soit I, J, K trois idéaux, avec I premier, tels que $I = J \cap K$; montrer que $I = J$ ou $I = K$.

d Montrer que si tout idéal de A est premier, alors A est un corps.

8 Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}\,] = \{ a + ib\sqrt{5} \ / \ a, b \in \mathbb{Z} \}$.
Montrer que A est un anneau. Chercher ses éléments inversibles.
Montrer que 2, 3 et $1 + i\sqrt{5}$ sont des éléments irréductibles.
Que dire de la formule $2.3 = (1 + i\sqrt{5}).(1 - i\sqrt{5})$?
Montrer que l'idéal $I = (2) + (1 + i\sqrt{5})$ n'est pas principal.

9 Soit A un anneau intègre, a et b deux éléments de A.
On suppose que $(a) + (b)$ est principal.
Montrer que $(a) \cap (b)$ est également principal.

Polynômes

1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

a Montrer que : $\exists\,!\ P_n \in \mathbb{R}[X], \forall \theta \in]0, \pi/2[,\ P_n(\cot^2\theta)\sin^{2n+1}\theta = \sin(2n+1)\theta$.

b Racines de P_n, leur somme ?

c Montrer que : $\forall \theta \in]0, \pi/2[,\ \cot^2\theta < 1/\theta^2 < 1 + \cot^2\theta$.

d **C**alculer $\zeta(2)$.

2 Chercher les racines rationnelles de $2X^3 - 11X^2 + 17X - 6$.

3 Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \leq 2n+1$ tel que :
$\forall k \in [0,n],\ P^{(k)}(0) = 0,\ \forall k \in [1,n],\ P^{(k)}(1) = 0$, et $P(1) = 1$.

Montrer que $d = 2n+1$ et que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

4 Décomposer $X^5 - 1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Calculer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

5 Soit $f : z \to \dfrac{1}{z}$ définie sur $\mathbf{U}$.

Déterminer le polynôme $P_n \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ interpolateur de *f* aux points de $\mathbf{U}_n$.

Est-ce-que (P_n) converge vers f sur $\mathbf{U}$?

6 Montrer l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que
$P(0) = P(1) = 1,\ P'(0) = 0,\ P'(1) = -1$.

Trouver tous les polynômes *P* de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient ces relations.

7 Soit $a_0,\dots,a_n$, $b_0,\dots,b_n$ des complexes, et $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

Montrer que si *f* a au moins $2n+1$ zéros dans $[0, 2\pi[$, alors *f* est nulle.

8 Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Montrer que Q' est scindé.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ non nul. Montrer que $aQ + bQ'$ est scindé.

Soit $P = \sum a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Montrer que $\sum a_n Q^{(n)}$ est scindé.

9 Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 5.

Montrer que si *P* a une racine multiple dans $\mathbb{C}$, alors *P* a une racine dans $\mathbb{Q}$.

10 $a_0 < a_1 \dots < a_n$. Montrer l'existence d'un unique système $(P_0,\dots,P_n) = B$ de polynômes unitaires de degré *n* tels que $P_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$. Montrer que *B* est libre.

Caractériser les *Q* unitaires de degré *n* de racines (b_j) telles que $a_0 < b_1 < a_1 < \dots b_n < a_n$.

11 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$; soit *m* le nombre de racines distinctes de *P*,
n celui de $P - 1$. Montrer que $d \leq m + n - 1$.
Soit *P* et $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constants tels que $\{ z \in \mathbb{C} \ /\ P(z) = 0 \} = \{ z \in \mathbb{C} \ /\ Q(z) = 0 \}$,
et $\{ z \in \mathbb{C} \ /\ P(z) = 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} \ /\ Q(z) = 1 \}$.
Montrer que $P = Q$.

12 Soit *A* et $B \in \mathbb{Q}[X]$. Comparer $A \wedge B$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

13 Décomposer $1 + X + \dots + X^{n-1}$ puis montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\dfrac{k\pi}{n} = n2^{1-n}$.

14 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$ SSI $\forall x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}$.

15 Soit *P* scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que P' est scindé.
Soit *a* la plus grande racine de *P* et $b > a$.
Montrer que la méthode de Newton initialisée avec b converge vers a.

16 Soit $A = X^3 + pX + q \in \mathbb{R}[X]$; calculer le reste de la division de A par A'.
CNS pour que A possède une racine double ? 3 racines réelles distinctes ?

17 Soit $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$; soit $\mu = 2.\max_{1\le k\le n} |a_k|^{1/k}$.
Soit $Z(P)$ l'ensemble des zéros de P. Montrer que si $z \in Z(P)$, $|z| \le \mu$.
Soit $Q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n$; trouver un majorant de $\sup\{d(x, Z(Q)) \,/\, x \in Z(P)\}$.

18 Soit $n = 2020$. Montrer l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$\forall\, k \in [0, n],\ P(k) = \dfrac{k}{k+1}$. Calculer $P(2021)$.

19 Soient $x_1, \ldots, x_d$ d complexes, et $u_n = \lambda_1 x_1{}^n + \ldots + \lambda_d x_d{}^n$.
Montrer que (u_n) est une suite récurrente linéaire.
Même question pour $u_n = \lambda_1 (X + x_1)^n + \ldots + \lambda_d (X + x_d)^n$.

20 Soit $E = \mathbb{R}[X]$, $u : P \to XP(X)$. Montrer que $u \in L(E)$. Quels sont les SEV de E stables par u ?

Fractions rationnelles

1 Décomposer $\dfrac{1}{X^n - 1}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

2 Soit $R = P/Q$ avec $P \wedge Q = 1$. Montrer que si $R(X) = R(-X)$, alors P et Q sont pairs.

3 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Soit $Q = X(X-1)\ldots(X-n)$.
Décomposer $\dfrac{P}{Q}$ en éléments simples. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{i\ne k}(k-i)}$.

Montrer que : $\exists\, k \in \{0, \ldots, n\}, |P(k)| \ge \dfrac{n!}{2^n}$; $\dfrac{n!}{2^n}$ est-il optimal ?

4 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 1$, à racines simples a_j ; montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(a_j)} = 0$.

On pourra décomposer $\dfrac{1}{P}$.

Corps

1 Montrer que $\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ est algébrique et trouver son polynôme minimal.

2 Résoudre $X^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Construire un corps à 9 éléments.
Existe-t-il un corps à 6 éléments ?

3 Soit $\alpha = i + j$. Montrer que α est algébrique sur $\mathbb{Q}$. Trouver son polynôme minimal.

Soient a et b complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Montrer qu'ils ont le même polynôme minimal SSI il existe σ isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Q}[a]$ sur $\mathbb{Q}[b]$ tel que $\sigma(a)= b$. Que dire de $\pm i + j$, $\pm i + j^2$?

4 Soit $P = X^3 - X^2 - 2X + 1$.

a Montrer que P possède 3 racines réelles : $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

b Montrer qu'elles sont irrationnelles.

c Soit θ une racine de P, $\mathbb{Q}[\theta] = \{ a + b\theta + c\theta^2 \;/\; a, b, c \in \mathbb{Q} \}$.

Montrer que c'est un corps. Quelle est sa dimension sur $\mathbb{Q}$?

d Montrer que si θ est racine de P, $2 - \theta^2$ aussi ; quelle est la 3e ?

e Comparer les $\mathbb{Q}[\theta_i]$.

5 Soit L un corps commutatif contenant $\mathbb{C}$.

Montrer que si L est de dimension finie sur $\mathbb{C}$, $L = \mathbb{C}$.
Si L n'est pas de dimension finie?

Nombres complexes

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left\{ x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \right\}$.

2 Montrer que dans $\mathbb{C}$, (a,b,c) est équilatéral SSI $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$.

On pourra utiliser $\exp(\frac{i\pi}{3})$.

3 Montrer que les complexes distincts u, v, w sont alignés SSI $\frac{w-v}{w-u}$ est réel.

Trouver les complexes z tels que z, z^2, z^5 soient alignés.