Racines carrées de matrices

1 Un exemple

Chercher dans $M_3(\mathbb{R})$ les racines carrées de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Indications

On note $a \in L(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. On montre que A est diagonalisable avec 3 valeurs propres. Il y a donc 3 SEVP de dimension 1 :

$$D_1, D_2, D_3$$

Supposons $B^2 = A$. Alors $AB = BA$, donc D_1, D_2, D_3 sont stables par B. Donc B est diagonalisable.

Dans une base de vecteurs propres, a est représenté par

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et b par

$$B' = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

On constate qu'il y a 4 racines carrées.

2 Spectre simple

Soit $A \in M_n(K)$, telle que $A^2 = M$ soit diagonalisable à spectre simple (avec n valeurs propres distinctes).

Montrer que A est diagonalisable.

Indications

Etudier l'exercice 1.

3 Une matrice triangulaire

Soit $A \in M_n(K)$, telle que $A^2 = M \in T_n(K)$, M ayant pour diagonale $(1, 2, ..., n)$.

Montrer que A est également triangulaire supérieure.

Indications

S'inspirer des 2 précédents. A l'aide de l'interpolation de Lagrange, on peut montrer que

$$A \in K[M]$$

4 $\operatorname{rg} B^2 \geq n - 1$

Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ et $A = B^2$. On suppose A diagonalisable et

$$\operatorname{rg} A \geq n - 1$$

Montrer que B est diagonalisable.

Indications

1- Cas où $\mathrm{rg}\, A = n$. Soit
$$P = \prod_{j=1}^{q} (X - \lambda_j)$$
un polynôme scindé à racines simples tel que $P(A) = 0$.

On vérifie que $P(X^2)$ est aussi scindé à racines simples.

2- Cas où $\mathrm{rg}\, A = n - 1$. On montre d'abord que
$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$$
Soit
$$P = X.\prod_{j=1}^{q} (X - \lambda_j)$$
un polynôme scindé à racines simples tel que $P(A) = 0$. Soit
$$Q = X.\prod_{j=1}^{q} (X^2 - \lambda_j)$$
On vérifie que Q est aussi scindé à racines simples, et $Q(B) = 0$.

5 Cas des triangulaires inversibles

1- Soit $T \in GL_n(\mathbb{C}) \cap T_n(\mathbb{C})$. Montrer l'existence d'au moins une racine carrrée U de T dans $T_n(\mathbb{C})$.

2- Quelle est la complexité de l'algorithme ?

3- Montrer que toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{C})$ possède au moins une racine carrée.

Indications

On choisit les $u_{i,i}$ tels que pour tous i, j,
$$u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$$
Ensuite, on explique comment résoudre le système
$$(u_{i,i} + u_{j,j})\, u_{i,j} = t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k} u_{k,j} \ \ (1 \leq i < j \leq n)$$

6 Dans $M_2(\mathbb{C})$

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Etudier le nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$.

Indications

1- A a deux valeurs propres distinctes non nulles : il y a 4 solutions.

2- A a deux valeurs propres distinctes, dont 0 : il y a 2 solutions.

3- $A = 0$: une infinité de solutions.

4- $A^2 = 0, A \neq 0$: aucune solution.

5- $A = \lambda I_2$ avec λ non nul : une infinité de solutions.

6- $A = \lambda I_2 + N$ avec λ non nul et N nilpotente non nulle : deux solutions.

7 Dans $M_2(\mathbb{R})$

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Etudier le nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Indications

1- A a deux valeurs propres distinctes strictement positives : il y a 4 solutions.
2- A a deux valeurs propres distinctes, dont une strictement négative : aucune solution.
3- $A = 0$: une infinité de solutions.
4- $A^2 = 0, A \neq 0$: aucune solution.
5- $A = \lambda I_2$ avec λ non nul : une infinité de solutions.
6- $A = \lambda I_2 + N$ avec $\lambda > 0$ et N nilpotente non nulle : deux solutions.
7- $A = \lambda I_2 + N$ avec $\lambda < 0$ et N nilpotente non nulle : aucune solution.
8- A a deux valeurs propres non réelles : deux solutions.