Matrices orthogonales

1 Trouver le cardinal de $T_n \cap O(n)$, de $T_n \cap SO(n)$.

2 Soit E un EVE, et $f \in L(E)$. Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la 3e :
a : $f^2 = -Id$. **b** : $f \in O(E)$. **c** : $\forall\, x \in E,\ x.f(x) = 0$.

3 Soit $A \in O(n)$. Montrer que $\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leq n$. (Utiliser ${}^t[1\ 1 \ldots 1]$). Montrer que $\sum_{i,j} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

4 **a** Soit $f \in O(E)$, et $F = \mathrm{Ker}(f + Id)$. On suppose que F est de dimension paire. Montrer que F et $F°$ sont stables par f. On note $g \in L(F°)$ l'endomorphisme induit par f. Montrer que $\det g > 0$ en étudiant la limite de χ_g en $-\infty$. Montrer que $\det f > 0$.
b On suppose que $f \in O(E)$, $g^2 = -Id$, $fg = gf$. Montrer que $\det f > 0$.

5 Peut-on avoir u, v, et $\dfrac{u+v}{2}$ éléments de $O(E)$?

6 Etudier l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$.

7 Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$: $X = \mathrm{com}\, X$.

8 Soit $u \in O(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $(u - \lambda Id)^2 = 0$; montrer que $\lambda = \pm 1$. En écrivant $u^k = (\lambda Id + u - \lambda Id)^k$, montrer que $u = \pm Id$.

9 Soit $M = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$. Trouver les ($a$, b) éléments de $\mathbb{R}^2$ tels que $M \in O(3)$, puis étudier M.

10 Soit $E = O(n) \cap M_n(\mathbb{Z})$; cardinal de E ? Trouver un morphisme surjectif de E sur σ_n.

11 Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$; donner une CNS pour que M soit diagonalisable.

12 Existe-t-il un produit scalaire pour lequel $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ est une matrice de rotation ?

13 Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = {}^tBB$. Montrer que : $\exists\, P \in O(n)$, $A = PB$. On pourra adapter la factorisation connue.