Produits scalaires

1 Soit $a < b$; soit $F = C^\circ([a,b],]0,+\infty[)$; on note $T(f) = \int_a^b f . \int_a^b \frac{1}{f}$. Trouver le minimum de T sur F. T est-elle majorée ? Déterminer $T(F)$.

2 Soit E un espace euclidien ; soit F et G deux sous-espaces ; montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux si et seulement si : $\forall x \in E, \|x\|^2 = d^2(x,F) + d^2(x,G)$.

3 Matrice du projecteur orthogonal sur $F = \{ X \in \mathbb{R}^4 / \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \}$?

4 Soit E un EVE de dimension n. Montrer qu'il n'existe pas $n+2$ vecteurs x_i tels que $< x_i, x_j > \ < 0$ si $i \neq j$, mais qu'il existe $n+1$ vecteurs unitaires $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ tels que $< x_i, x_j > \ = -\frac{1}{n}$ si $i \neq j$.

5 Soit E un EVE, p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que $p \circ q = 0$ SSI $q \circ p = 0$.

6 Soit E un EV préhilbertien, $u_1, \ldots, u_n$ unitaires tels que : $\forall\ x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x/u_k)^2$.
Montrer que $\dim E = n$ et que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une BON de E.

7 Soit $f_1, \ldots, f_n \in E = C^\circ([0,1], \mathbb{R})$; y a-t-il existence, unicité, de $f \in E$ tel que : $\forall j \leq n,\ \int_0^1 f . f_j = 1$?

8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{q=1}^{n} q\sqrt{q} \ \leq \ \frac{n(n+1)}{2}\sqrt{(2n+1)/3}$. Y a-t-il égalité ?

9 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du PS canonique. Soit $F = \{ P \in E /\ P(0) = 0\}$, $G = \{ P \in E /\ P(1) = 0 \}$. Trouver $F^\perp$, $G^\perp$. Soit $G_n = G \cap \mathbb{R}_n[X]$. Trouver $d(1, G_n)$ et le projeté orthogonal de 1 sur G_n.

10 Soit $x_1, \ldots, x_p$, $y_1, \ldots, y_p$ vecteurs de E EVE. On suppose que : $\forall\ i, j,\ (x_i / x_j) = (y_i / y_j)$. Montrer que $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = \mathrm{rg}(y_1, \ldots, y_p)$. (Montrer que les combinaisons linéaires nulles sont les mêmes).

11 Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ muni du PS canonique. $S_n^\perp$? Soit $A \in E$. Trouver $\inf_{M \in S_n} \sum_{i,j} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$.

12 Soit $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ tels que : $\forall\ i \neq j,\ < x_i, x_j > \ < 0$. On veut montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre. On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Soit $X = \{ i /\ \lambda_i > 0\}$. Si $X \neq \phi$, soit $y = \sum_X \lambda_i x_i$. Montrer que $< y, y > \ < 0$. A l'aide de x_{n+1}, montrer que X est vide, puis conclure.

13 Soit $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $(f / g) = \int_0^1 fg + f'g'$. Montrer que cela définit un produit scalaire sur E. Soit $F = \{ f \in E /\ f(0) = f(1) = 0 \}$ et $G = \{ g \in E /\ g'' = g \}$. Montrer que dans E, F et G sont supplémentaires orthogonaux. Préciser $p_G(f)$. On fixe deux réels α et β, et on note $E_{\alpha,\beta} = \{ h \in E /\ h(0) = \alpha$ et $h(1) = \beta \}$. Déterminer $\inf \{ \int_0^1 h^2 + h'^2 \ / h \in E_{\alpha,\beta} \}$.

14 Soit F l'ensemble des polynômes éléments de $\mathbb{R}_4[X]$ unitaires de degré 4. Montrer qu'il existe un unique élément Q de F qui minimise $\left\{ \int_{-1}^1 P^2 \ / P \in F \right\}$. Montrer que Q est pair. Calculer Q.