Sous-groupes de $GL_n(K)$

1 $G \cap SL_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$

Soit G un sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{C})$ tel que $G \cap SL_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$.

Montrer que G est cyclique.

2 GL_n et GL_m

Soit K et L deux sous-corps de $\mathbb{C}$; soit G un sous-groupe fini de $GL_n(K)$ tel que

$$\forall A \in G, A^2 = I_n$$

1) Montrer que G est abélien.
2) Montrer que les éléments de G sont diagonalisables.
3) Montrer que $\operatorname{card} G \leq 2^n$.
4) Soit φ un morphisme injectif de $GL_n(K)$ dans $GL_m(L)$; montrer que $n \leq m$.

3 Supplémentaire stable

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et G un sous-groupe fini de $GL(E)$ de cardinal n ; pour $f \in L(E)$, on pose

$$\overline{f} = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \circ f \circ g^{-1}$$

1) Montrer que $\forall g \in G, \overline{f} g = g \overline{f}$.
2) Montrer que $f = \overline{f}$ si et seulement si f commute avec tout élément de G.

On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E stable par tout élément de G ; on veut montrer que F possède un supplémentaire stable par tout élément de G.

3) Soit p un projecteur d'image F ; montrer que $\operatorname{Im} \overline{p} \subset F$.
4) Montrer que

$$\forall x \in F, \overline{p}(x) = x$$

5) Montrer que $\overline{p}$ est un projecteur d'image F.
6) Conclure.
7) Construire un contre-exemple dans le cas où G n'est pas fini à l'aide de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4 Sur les sous-groupes finis de $O(n)$

$F = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique. On note $E = M_n(\mathbb{R})$.

1- Norme subordonnée : montrer qu'on définit une norme sur E par

$$\|M\| = \sup_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

2- Montrer que

$$\forall A, B \in E,\ \|A.B\| \leq \|A\| . \|B\|$$

3- $\|M\|$ si $M \in O(n)$?

4- Soit $\varepsilon > 0$; on dit qu'une partie A de E est $\varepsilon-$séparée si :

$$\forall x \neq y \in A,\ \|x - y\| \geq \varepsilon$$

Montrer l'existence de $m > 0$ tel que toute partie $\varepsilon-$séparée de $O(n)$ possède moins de m éléments.

5- Soit G un sous-groupe fini de $O(n)$; soit G' le sous-groupe de G engendré par

$$\{M \in G/ \ \|M - I_n\| \leq \varepsilon\}$$

Montrer que

$$|G| \leq m\,|G'|$$

5 Partie génératrice de $GL_n(\mathbb{C})$

Soit U un ouvert de $G = GL_n(\mathbb{C})$ contenant $\{I_n\}$ et H le sous-groupe de G engendré par U.

1- Montrer que H est ouvert dans G.

2- Montrer que H est fermé dans G.

3- Conclure.

6 $SO(3)$ est un groupe simple

Soit G un sous-groupe de $SO(3)$, et G_0 la composante CPA de $\{\mathrm{Id}\}$ dans G.

1- Montrer que G_0 est un sous-groupe de G.

2- Montrer que si $G \lhd SO(3)$, alors $G_0 \lhd SO(3)$.

3- On suppose $G \lhd SO(3)$, G CPA, $G \neq \{\mathrm{Id}\}$. Montrer que G contient une rotation d'angle π, puis montrer que $G = SO(3)$.

4- On suppose $G \lhd SO(3)$; montrer que $G = SO(3)$ ou $G = \{\mathrm{Id}\}$.

7 Un théorème de Burnside sur l'exposant

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$; soit $q \in \mathbb{N}^*$; on suppose que

$$\forall g \in G,\ g^q = I_n$$

1. Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables.
2. Soit $g \in G$; montrer que si $\mathrm{tr} g = n$, alors $g = I_n$.
3. Montrer que l'ensemble T des traces des éléments de G est fini.
4. Soit g et g' deux éléments de G ; on suppose que :

$$\forall x \in G, \mathrm{tr}(g.x) = \mathrm{tr}(g'.x)$$

montrer que $g = g'$.

5. Montrer que G est fini.

Indications

1. $X^q - 1$ est scindé à racines simples.
2. Notons $\lambda_j = a_j + i.b_j$ les n valeurs propres de g. Alors :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = n$$

Or : $\forall j, a_j \leq 1$. Donc : $\forall j, a_j = 1$. On en déduit que $g = I_n$.

3. Ce sont des sommes de n éléments de $\mathbb{U}_q$.
4. Choisir $x = g^{-1}$.
5. Soit F le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ engendré par G ; soit B une base de F constituée d'éléments de G ; soit

$$t: \begin{array}{ccc} G & \to & T^B \\ g & \to & (\mathrm{tr}\, gx)_{x \in B} \end{array}$$

D'après 4., t est injective ; T^B étant fini, G est fini.

8 $\|MX - X\|_2 \leq C \|X\|_2$

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$; on suppose l'existence d'une constante

$$C \in [0, 2[$$

telle que

$$\forall M \in G, \forall X \in \mathbb{C}^n,\ \|MX - X\|_2 \leq C \|X\|_2$$

Montrer l'existence de $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall M \in G,\ M^m = I_n$$

Indications

- Montrer que les valeurs propres sont de module 1.
- Revoir la caractérisation de $\left(M^k\right)_{k \geq 0}$ bornée.

9 Centralisateur dans $GL_n(K)$

Soit X une partie de $GL_n(K)$ et G son centralisateur. Montrer l'existence de $X_0 \subset X$, fini, dont le centralisateur est G.