Arithmétique

1 Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\ a_n\,,\ b_n \in \mathbb{N},\ a_n \wedge b_n = 1$ et $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}\,b_n$.

2 Suite de Fibonacci : $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Donner une formule explicite pour u_n.
Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; exprimer les puissances de M à l'aide de (u_n). Montrer que pour n et p entiers naturels :
$u_{n+1}{}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$, $\quad u_{n+p} = u_{n-1}u_p + u_n u_{p+1}$, $\quad u_{n+p} \wedge u_n = u_n \wedge u_p$, $\quad u_n \wedge u_p = u_{n\wedge p}$.
Proposer des algorithmes de calcul de (u_n).

3 Soit $q = 7^7$. Dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^q ? Qu'en pense Python ?

4 Résoudre $x^2 - 4x + 3 = 0$ dans $\mathbb{Z} / 143\, \mathbb{Z}$

5 Montrer que : $\forall\, n \geq 1 \quad 10^{10^n} \equiv 4\ [7]$.

6 Les groupes $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$, $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ sont-ils cycliques ?

7 Soit U le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$. Ordre de $\bar{5}$? Montrer que U est engendré par $-\bar{1}$ et $\bar{5}$.

8 Soit $a \geq 2,\ p, q \geq 1$ des entiers ; soit $n = a^p - 1$; quel est l'ordre de a dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$?
Montrer que p divise q SSI $a^p - 1$ divise $a^q - 1$.
Quel est le PGCD de $a^p - 1$ et $a^q - 1$?

9 Soit P l'ensemble des nombres premiers, et $P_n = \{\ p \in P\ /\ p \leq n\ \}$; montrer que $\prod_{p\in P_n} p \leq 4^n$.
On pourra procéder par récurrence sur n, et vérifier que $2\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m+1}$.

10 Soit G un groupe de cardinal pair ; montrer que G possède un élément d'ordre 2.
En déduire que si $p > 2$ est premier, $-\bar{1}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ SSI $p \equiv 1[4]$.

11 Résoudre dans $\mathbb{N}$: $x^2 + y^2 = 3z^2$ en utilisant une congruence.

12 Soit n un entier divisible ni par 2 ni par 5. Montrer qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1 en base 10.

13 Quels sont les entiers naturels n tels que $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ soit un carré ?

14 Trouver les $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ tels que chacun des trois entiers divise la somme des deux autres.

15 Reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n ?

16 Soit n entier naturel. Montrer que l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 4^n(8t + 7)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^4$.

17 Quels sont les nombres premiers p tels que p divise $2^p + 1$?

18 Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$: $\{\ x + y + z = 6,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ x^3 + y^3 + z^3 = 3\ \}$.

19 Trouver les entiers $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que 7 divise $2p+3q$.

20 Soit p premier de la forme $3q+1$. Montrer qu'il existe $a \in F_p{}^*$ tel que $a^q \neq 1$, puis $b \in F_p{}^*$ d'ordre 3. En déduire que $-\bar{3}$ est un carré dans F_p .

21 Soit p premier ; montrer que $v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$; montrer que si p^p divise $n!$, alors p^{p+1} divise $n!$.

22 $u_0 = 9$, $u_{n+1} = 3u_n{}^4 + 4u_n{}^3$. Montrer que l'écriture décimale de u_{11} comporte plus de 2021 chiffres 9.